Chapitre 2 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 2.1

Montrer que la série $\sum \frac{exp(sin(n^3))}{\sqrt{n}}$ est divergente en utilisant la règle de comparaison.

Correction

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{exp(sin(n^3))}{\sqrt{n}}$

Comme $sin(n^3) \in [-1, 1]$ et par croissante de exp on a : $0 \leq exp(-1) \leq exp(sin(n^3))$ et donc $0 \leq \frac{1}{e\sqrt{n}} \leq u_n$
Alors, comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, alors, par la règle de comparaison pour les séries à termes positifs, on a : $\boxed{\sum \frac{exp(sin(n^3))}{\sqrt{n}} \text{ est divergente}}$

Enoncé, Exercice 2.2

A l'aide d'une majoration, montrer la convergence de $\sum \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25}$

Correction

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25}$

On a pour $n \geq 1$: $n^2 + 3 + 25 \geq n^2 > 0$ et donc $0 \leq \frac{1}{n^2+3n+25} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme de plus $n \geq 1 \Rightarrow n + cos(n^2) > 0 \Rightarrow 0 \leq arctan(n + cos(n^2)) \leq \frac{\pi}{2}$

On a donc $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2n^2}$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors par la règle de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum u_n$ est convergente.

Bilan : $\boxed{\sum \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25} \text{ est convergente}}$

Enoncé, Exercice 2.3

Etudier la convergence de $\sum(tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n})$ en utilisant la règle de l'équivalent.

Correction

Pour n au voisinage de $+\infty$: $u_n = tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$

Pour x au voisinage de 0 :

$tan(x)$

$= \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$

On a donc $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^3} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{cases}$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs : $\boxed{\sum(tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}) \text{ est convergente}}$

Enoncé, Exercice 2.4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = P(n)e^{-\sqrt{n}}$

Correction

$n^2 u_n = n^2 P(n) e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exponentielle-puissance.

Donc $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

De plus $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par négligeabilité $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Enoncé, Exercice 2.5

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2^n n^2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Correction

Pour $n \geq 1$, $u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^n n^2}{2^{n+1}(n+1)^2} = \frac{n^2}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$

Donc par la règle de D'Alembert : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Enoncé, Exercice 2.6

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!2^k}$

On admettra (pour le moment) que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est une série convergente dont la somme vaut $exp(1) = e$

Correction

On sait que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ est une série géométrique convergente donc la somme vaut $\frac{1}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{3}{2}$

On utilise $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = exp(1) = e$

Le produit de Cauchy des ces deux séries absolument convergente est donné par $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ avec :

$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1}{(n-k)!} = u_n$

Comme les séries sont absolument convergentes, alors $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}e}$