Feuille d'exercices n°8 : chap. 3

Exercice 87. *On note E l'ensemble des suites réelles. On pose :*
$F =$ "ensemble des suites bornées" , $G =$ "ensemble des suites convergentes"
$H = \{(u_n)_{n\in N} \in E\ ,\ u_0 + u_1 = 0\}$, $I = \{(u_n)_{n\in N} \in E\ ,\ u_0 + u_1 = 1\}$,
$J = \{(u_n)_{n\in N} \in E\ ,\ u_0 u_1 = 0\}$
$K = \{(u_n)_{n\in N} \in E\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow u_n = 0\}$
Parmi les ensembles ci-dessus, lesquels sont des espaces vectoriel ?

Exercice 88. *Soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \}$
Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 89. *($\star$) Soit E un K espace vectoriel, F et G deux sous espace vectoriel de E. On suppose que $E = F \cup G$. Montrer alors que $F = E$ ou $G = E$.*

Exercice 90. *On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles.*
On pose $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E\ ,\ \sum u_n^2$ *est convergente*$\}$
a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$
b) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Remarque : en parle d'espace L^2 ...

Exercice 91. *Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
a) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée et trouver une combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) liant ces vecteurs.
b) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$ est libre.

Exercice 92. *On pose* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = exp(x) \\ f_3(x) = sin(x) \\ f_4(x) = cos(x) \end{cases}$
Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 93. *On pose* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = cos(x) \\ f_3(x) = cos(2x) \\ f_4(x) = cos^2(x) \end{cases}$
a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
b) Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille liée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$