Feuille d'exercices n°9 : chap. 3 et 4

Exercice 94. ($\star$) *A) On pose* $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = e^{inx}$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ *la famille* $(f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ *est libre dans* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$
B) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = cos(nx)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ *la famille* $(f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 95. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* E *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant :*
$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
a) Montrer que E *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel.*
b) Montrer que : $\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ *est un isomorphisme.*
c) Retrouver le résultat du cours sur la dimension de E*.*
d) Déterminer les suites $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
e) Déterminer les suites $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant :* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$
f) Déterminer les suites $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 10u_n$

Exercice 96. *($\star$) Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie, soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.*
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur F *et* G *pour qu'il existe* $u \in L(E)$ *tel que* $Ker(u) = F$ *et* $Im(u) = G$*.*

Exercice 97. *Dans* $\mathbb{R}^4$ *on considère* $F = vect((1,1,1,0),(1,0,1,2),(-2,1,0,0))$*.*
Montrer que F *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$ *et en donner une équation dans la base canonique.*

Exercice 98. *($\star\star$) Montrer que tout hyperplan de* $M_n(\mathbb{C})$ *contient au moins une matrice inversible.*

Exercice 99. *($\star$) Soit* E *un* K *espace vectoriel de dimension finie* $n \geq 2$*.*
Soit $p \in [\![1;n]\!]$*,* H_1*, ...,* H_p *des hyperplans de* E*.*
Montrer que : $dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \in [\![n-p; n-1]\!]$

....

Exercice 100. *Déterminer le rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 101. *Déterminer suivant* $a \in \mathbb{R}$ *le rang de* $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & 2a & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 102. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
a) Calculer $A^T A$*,* AA^T *et* A^2
b) A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}
c) Calculer $A^{64216541355696}$