

Feuille d'exercices n°10 : chap. 4

Exercice 103. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique et antisymétrique. Que dire de A ?

Exercice 104. Inverser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 105. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = A - D$

a) Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 106. Soit $n \geq 2$ et U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.

a) Calculer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

b) Calculer $(I_n + U)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Exercice 107. Calculer les déterminants suivants : $a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Exercice 108. En utilisant la ruse plutôt que Sarrus, donner sous forme factorisée l'expression

de $A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ et de $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 109. (★)

Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$

Exercice 110. Soit $n \in \mathbb{N}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0_{M_n(\mathbb{R})} & I_n \\ -I_n & 0_{M_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ Déterminer $\det(A)$

Exercice 111. Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 2 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

Déterminer pour quelle valeur du réel a la matrice A est inversible.