Feuille d'exercices n°11 : chap. 4

Exercice 112. *($\star$) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.*
Montrer que $det(A^2 + B^2) \geq 0$

Exercice 113. *Soit M une matrice antisymétrique de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$. Calculer $det(M)$.*

Exercice 114. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. Soit $D = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$*

Soit U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.
On pose $\forall h \in \mathbb{R} \quad P(h) = det(D + hU)$
a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_1[X]$
b) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$
c) Calculer $det(D)$.
d) Calculer $det(D)$ dans le cas $a = b$

Exercice 115. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\delta_n = det \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (déterminant d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$)*
Déterminer δ_n en fonction de n.

Exercice 116. *On muni $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $B = (i, j)$*
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (3x + 4y, 2x + y)$
a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer A la matrice de f relativement à B.
b) Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1} sous la même forme que la définition de f.
c) Montrer que $B' = (i - j, 2i + j)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f relativement à B'.

Exercice 117. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$*
Déterminer $ker(A)$ et $Im(A)$

Exercice 118. *On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit D un polynôme non nul de E de degré p tel que : $0 < p < n$.*
Pour tout $P \in E$ on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par D.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Montrer que f est une projection.
c) Déterminer $Im(f)$ et $ker(f)$

Exercice 119. *a) Trouver une application linéaire injective mais non surjective.*
b) Trouver une application linéaire sujective mais non injective.