Feuille d'exercices n°12 : chap. 4

Exercice 120. *Soit* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* B *la base canonique de* E.
On pose $\forall P \in E \quad \phi(P)(X) = P(X+1)$
a) Déterminer A *la matrice de* ϕ *relativement à* B
b) Déterminer A^{-1}

Exercice 121. *Soit* f *l'application définie sur* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *par* $\forall P \in E \ f(P) = P - X^2P''$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* E.
b) Montrer que f *est une symétrie.*
c) Déterminer les éléments caractéristique de cette symétrie.

Exercice 122. *Soit* $N \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $N^2 = (0)$ *Montrer que* $I_n + N$ *est inversible*

Exercice 123. *(⋆)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang 1.*
Montrer que : $A^2 = tr(A)A$
Donner une expression de A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 124. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'application définie sur* $E = M_2(\mathbb{R})$ *par*
$\forall M \in M_2(\mathbb{R}) \quad f(M) = AM$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* E.
b) Déterminer une base de $ker(f)$
c) f *est-il surjectif ?*
d) Déterminer une base de $Im(f)$.
e) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = ker(f) \oplus Im(f)$ *?*

Exercice 125. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$. $u = (1,2,-1) \in E$, $v = (1,2,1) \in E$
et $F = \{(x,y,z) \in E \ , \ x+y+z = 0\}$. *On pose G=Vect(u)*
a) Montrer que $E = F \oplus G$
b) Donner une équation cartésienne de $P = Vect(u,v)$
c) Déterminer une base de $P \cap F$

Exercice 126. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Ecrire A *comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Exercice 127. *Déterminer suivant* a *le rang de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a-1 & 2a+1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$