

Feuille d'exercices n°13 : chap. 5

Exercice 128. Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$

Déterminer suivant a le rang de A

Exercice 129. (★)

Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\}$

a) Montrer que F est un espace vectoriel et que (I_3, J, J^2) est une base de F

b) On pose $c(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$. Déterminer $c(J)$

Exercice 130. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $F = \ker(\text{tr})$ (tr est la forme linéaire trace).

On pose $\forall M \in E \quad \phi(M) = \text{tr}(M)I_n + M$

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

c) Déterminer $\ker(\phi)$

d) Soit $M \in F$, calculer $\phi(M)$

e) Montrer que : $E = F \oplus \text{Vect}(I_n)$

f) Montrer que ϕ admet pour matrice une matrice diagonale dans une certaine base.

En déduire le rang et la trace de ϕ .

Exercice 131. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E admettant $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ comme

matrice relativement à la base canonique de E

a) Montrer que f est une symétrie de E

b) Déterminer les caractéristiques de f (c'est-à-dire $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f + \text{Id})$)

Exercice 132. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant :

$f \circ f - 2f - 3\text{Id}_E = 0_{L(E)}$

On pose $A = \ker(f + \text{Id}_E)$ et $B = \ker(f - 3\text{Id}_E)$.

a) Montrer que A et B sont stables par f

b) Montrer que : $E = A \oplus B$

c) Si E est de dimension 3. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(f)$?

Exercice 133. Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3.

On suppose que $f \neq 0_{L(E)}$ et que $f \circ f = 0_{L(E)}$.

a) Déterminer une inclusion entre $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$

b) Déterminer le rang de f .

c) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f)$, la matrice relativement à B de f , ait 8 coefficients nuls.