Feuille d'exercices n°14 : chap. 5

Exercice 134. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *une matrice par blocs de* $M_n(\mathbb{R})$ *avec* $A \in M_p(\mathbb{R})$, $D \in M_q(\mathbb{R})$.
a) Quel est le format de B *?*
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A, B, D *pour que* M *soit inversible.*

Exercice 135. *Soit* E *un* K *espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f \in L(E)$
Montrer que : $ker(f) = ker(f \circ f) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f \circ f)$

Exercice 136. *Soit* E *un* K *espace vectoriel et* $E_1,E_2,\dots,E_p$ p *sous-espace vectoriel de* E.
Montrer que : $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ *est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de* E *contenant* $E_1,E_2,\dots,E_p$.

Exercice 137. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
a) Trouver un polynôme unitaire de degré 2 annulateur de A. *On note* P *ce polynôme.*
b) Déterminer, en fonction de n, *le reste de la division euclidienne de* X^n *par* P
c) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 138. *($\star$)*
Soit E *un* K *espace vectoriel de dimension* n *et* u *un endomorphisme de* E *vérifiant* $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ *et* $u^n = 0_{L(E)}$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E$ *tel que :* $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ *soit une base de* E.
b) Calculer $det(u)$ *et* $tr(u)$.
c) Montrer que $v = Id_E + u$ *est inversible et déterminer son inverse.*

Exercice 139. *($\star$)*
Soit E *un* K *espace vectoriel de dimension finie. Soit* $u \in L(E)$
Montrer que : $dim(ker(u)) \leq dim(ker(u^2)) \leq 2dim(ker(u))$

Exercice 140. *($\star$)*
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* A *est "à diagonale strictement dominante" c'est-à-dire que* $\forall i \in [\![1;n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\in[\![1;n]\!]\setminus\{i\}} |a_{i,j}|$.

Montrer que $Ker(A) = \{0\}$

Aide : on pourra envisager une colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *de* $Ker(A)$ *et* i_0 *tel que* $|x_{i_0}| = \underset{i\in[\![1;n]\!]}{Max} |x_i|$

Exercice 141. *($\star$)*
Soient A *et* B *dans* $M_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}), \quad AXB = 0$.

Montrer que $A = 0$ *ou* $B = 0$.

Exercice 142. *Soit une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 + 3A^2 + 3A + I_n = 0$.

Montrer que A *est inversible et que* $A + I_n$ *n'est pas inversible.*