

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°1, bonus

Problème e3A PC, math 2 2018

I.1) Posons, pour tout $x > 0$, $\theta(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Alors θ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	e	$+\infty$
$\theta'(x)$		+	0 -
θ	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e} \searrow$	0

On remarque que $\theta(1) = 0$.

a) Supposons que $a \in]-\infty, 0]$

Pour $x \geq e$ on a $\theta(x) > 0 > a$ et donc l'équation $\theta(x) = a \Leftrightarrow (E_a)$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[e, +\infty[$

Sur l'intervalle $]0, e[$, θ est strictement croissante et continue, donc, d'après les limites aux bornes, on a que la restriction de θ à l'intervalle $]0, 1[$ est une bijection de $]0, e[$ vers $]-\infty, 0[$.

L'équation $\theta(x) = a \Leftrightarrow (E_a)$ admet une unique solution sur cet intervalle. (existence par le théorème des valeurs intermédiaires et unicité par stricte monotonie)

Bilan : Si $a \in]-\infty, 0]$ alors (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, e[$.

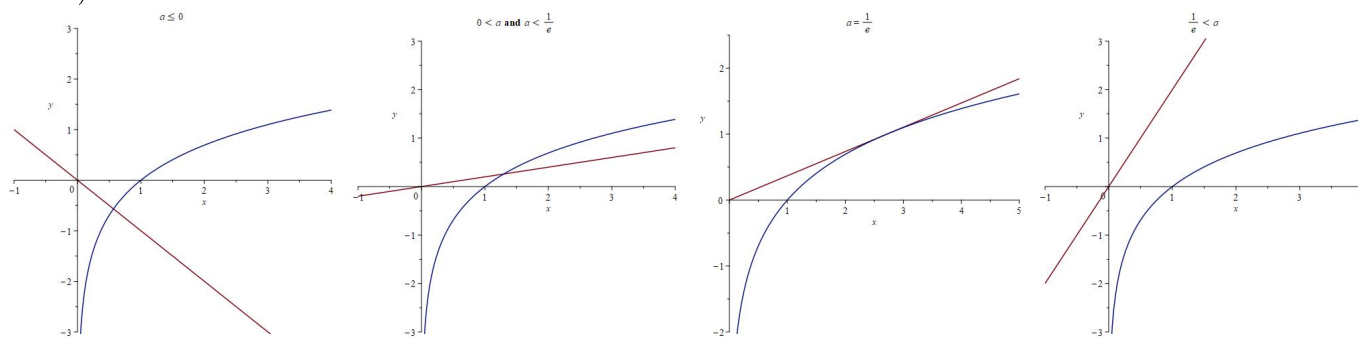
Avec le même type de raisonnement, on obtient :

b) Si $a \in]0, \frac{1}{e}]$ alors (E_a) admet exactement deux solutions $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$

c) Si $a = \frac{1}{e}$ alors (E_a) admet une unique solution e

d) Si $a > \frac{1}{e}$ alors (E_a) n'admet pas de solution.

2°)



II.1) Supposons que φ soit constante, solution de (R)
 Notons r la constante de telle sorte que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = r$
 Alors $(R) \Leftrightarrow r = r^2 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 1$

Bilan : Il existe exactement deux fonctions constantes solutions de (R) :
 la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

II.2) Première implication : Si $\varphi(0) = 0$, alors, en prenant $y = 0$:
 $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x+0) = \varphi(0)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = 0\varphi(x) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$

Réciproque : Si $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$ alors en prenant $x = 0$, $\varphi(0) = 0$

Bilan : Si φ est solution de (R) alors $\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$

II.3.a) Par contraposée du 2) on a $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0$
 La relation (R) donne : $\varphi(x+0) = \varphi(0)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(0)\varphi(x)$ et comme on vient de voir que $\varphi(x) \neq 0$
 alors $\varphi(0) = 1$

On a aussi $\varphi(x) = \varphi(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \varphi(\frac{x}{2})^2 \geq 0$ et comme $\varphi(x) \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$

II.3.b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour commencer, montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(nx) = \varphi(x)^n$

Au rang $n = 0$

$\varphi(0x) = \varphi(0) = 1 = \varphi(x)^0$, la relation est donc bien vérifiée.

Remarque : la relation au rang 1 est évidente.

Supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$

$\varphi((n+1)x) = \varphi(nx+x) = \varphi(nx)\varphi(x) = \varphi(x)^n\varphi(x) = \varphi(x)^{n+1}$

On a bien la relation au rang $n+1$

Conclusion : par récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(nx) = \varphi(x)^n$

Maintenant si $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$: $1 = \varphi(0) = \varphi(nx - nx) = \varphi(nx)\varphi(-nx)$
 mais $\varphi(-nx) = \varphi(x)^{-n}$ donc $1 = \varphi(nx)\varphi(x)^{-n}$ et donc (comme $\varphi(-nx) \neq 0$) $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(nx) = \varphi(x)^n$

II.3.c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ alors $\varphi(1) = \varphi(m\frac{1}{m}) = (\varphi(\frac{1}{m}))^m$ à l'aide du b).

On a donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, \varphi(1) = (\varphi(\frac{1}{m}))^m$

II.3.d) Soit $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors : $\varphi(\frac{n}{m}) = \varphi(n\frac{1}{m}) = (\varphi(\frac{1}{m}))^n$ avec le b)

En utilisant le c) on a : $\varphi(\frac{1}{m}) = (\varphi(1))^{\frac{1}{m}}$ et en reportant ci-dessus : $\varphi(\frac{n}{m}) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$

Bilan : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \varphi(\frac{n}{m}) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$

II.3.e) Par définition de la partie entière : $10^n x - 1 \leq \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$
 En multipliant par 10^{-n} on a : $x - 10^{-n} \leq x_n \leq x$. Alors, par encadrements et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$

II.3.f) Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme au e). Par construction c'est une suite de rationnels et on peut donc utiliser le e) et obtenir pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(x_n) = (\varphi(1))^{x_n}$

Comme φ est par hypothèse **continue** et que $x \mapsto \varphi(1)^x$ est aussi continue alors, en passant à la limite dans la relation ci-dessus, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (\varphi(1))^x$

III.1.a) Directement : $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = \frac{1}{2}X(X+2)$

III.1.b) Directement : $P_0(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) = 0$

III.2.) Si on dérive la relation définissant P_n alors :

$$P'_n(x) = \frac{1}{n!}(x+n)^{n-1} + \frac{n-1}{n!}x(x+n)^{n-2} = \frac{(x+n)^{n-2}}{n!}[(x+n) + (n-1)x] = \frac{(x+n)^{n-2}}{n!}n(x+1)$$

$$\text{Donc } P'_n(x) = \frac{(x+1)(x+n)^{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(x+1)(x+1+(n-1))^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x+1)$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$

III.3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y)$

Au rang $n = 0$ la relation s'écrit $1=1$, elle est donc vérifiée.

Au rang $n = 1$ la relation s'écrit $x+y = y+x$, elle est donc aussi vérifiée.

Supposons la relation vraie au rang $n-1$ et démontrons là au rang n (avec $n \geq 2$).

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = P_n(x+y) - \sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y)$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\psi'(x)$ on tient compte du fait que $P_0(x) = 1$

$$= P'_n(x+y) - \sum_{k=1}^n P'_k(x)P_{n-k}(y) \text{ on utilise la relation du III.2)}$$

$$= P'_n(x+y) - \sum_{k=1}^n P_{k-1}(x+1)P_{n-k}(y) \text{ changement d'indice } k' = k-1$$

$$= P'_n(x+y) - \sum_{k'=0}^{n-1} P_{k'}(x+1)P_{n-1-k'}(y) \text{ on utilise la relation de récurrence}$$

$$= P'_n(x+y) - P'_{n-1}(x+1+y) \text{ on utilise la relation du III.2)}$$

$$= 0$$

La fonction ψ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, comme elle vaut 0 en $x = 0$, alors elle est nulle et on en déduit la relation au rang n .

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y)$

$$\begin{aligned}
& \text{IV.1.a) } (x+n)^{n-1} \\
&= \exp((n-1)\ln(x+n)) \\
&= \exp((n-1)\ln(n(1+\frac{x}{n}))) \\
&= \exp((n-1)[\ln(n) + \ln(1+\frac{x}{n})]) \\
&= \exp((n-1)[\ln(n) + \frac{x}{n} + o(\frac{x}{n})]) \\
&= \exp((n-1)\ln(n))\exp(\frac{n-1}{n}x)\exp(o(1)) \\
&\sim n^{n-1}e^x
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{(x+n)^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{n-1}e^x}$

IV.1.b) On rappelle la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}$

$P_n(x) = \frac{1}{n!}x(x+n)^{n-1}$ On utilise Stirling et la formule du a) :

$$P_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(\frac{e}{n})^n x n^{n-1} e^x \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{3/2}}} x e^x$$

Pour $a \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $u_n = P_n(x)a^n$, alors $u_n \neq 0$ et $u_n \sim \frac{(ae)^n}{\sqrt{2\pi n^{3/2}}} x e^x$

Donc $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \sim \left| \frac{(ae)^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)^{3/2}}} x e^x \times \frac{\sqrt{2\pi n^{3/2}}}{(ae)^n} \frac{1}{x e^x} \right| \sim |ae| \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |ae|$

On utilise la règle de D'Alembert et on a :

$$|a| < \frac{1}{e} \Leftrightarrow |ae| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Leftrightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

$$|a| > \frac{1}{e} \Leftrightarrow |ae| > 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1 \Leftrightarrow \sum u_n \text{ divergente}$$

Il reste le cas $|a| = \frac{1}{e}$, dans ce cas : $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n^{3/2}}} x e^x$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, alors par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs on a $\sum u_n$ convergente.

Si $a = 0$, $u_n = 0$ donc $\sum u_n$ est convergente.

On a donc : $\boxed{a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*, \sum P_n(x)a^n \text{ convergente si et seulement si } |a| < \frac{1}{e}}$

IV.2.a) Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = P_n(x)a^n$

Soit $A > 0$, alors, $\forall x \in [-A, A], |P_n(x)| \leq P_n(A)$ et donc $|P_n(x)a^n| \leq P_n(A)a^n$

On peut donc poser $\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \in [-A, A]} |f_n(x)|$ et on a : $\|f_n\|_{\infty, A} \leq P_n(A)a^n$

Par choix de a on a : $\sum P_n(A)a^n$ convergente et donc par règle de comparaison $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ est absolument convergente.

On en déduit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[-A, A]$, comme les f_n sont continues alors $\sum f_n$ est continue sur $[-A, A]$.

F_a est ainsi continue sur tout intervalle de la forme $[-A, A]$, comme $\bigcup_{A>0} [-A, A] = \mathbb{R}$, on en déduit :

$\boxed{F_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

IV.2.b) cf cours

IV.2.c) $F_a(x)F_a(y) = (\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(y)a^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y)]a^n$ par produit de Cauchy (convergence absolue sur $\mathbb{R}$)

En utilisant III.3) on a : $F_a(x)F_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+y)a^n = F_a(x+y)$

F_a est donc une fonction continue, solution de l'équation fonctionnelle (R).

On a donc, par la question II.3.f) que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = (F_a(1))^x}$

IV.2.d) Chaque fonction f_n est C^1 et $\forall n \geq 1$, $f'_n(x) = P'_n(x)a^n = P_{n-1}(x+1)a^n$ (et $f'_0(x) = 0$)

La série de fonction $\sum f'_n$ est alors la série $\sum P_{n-1}(x+1)a^n = a \sum P_{n-1}(x+1)a^{n-1}$ et elle est normalement convergente sur tout intervalle $[-A, A]$ comme au a).

On a alors : $\left\{ \begin{array}{l} \text{les fonction } f_n \text{ sont } C^1 \text{ sur } [-A, A] \\ \sum f_n \text{ converge simplement sur } [-A, A] \text{ (a) } \\ \sum f'_n \text{ converge normalement donc uniformément sur } [-A, A] \end{array} \right.$

On en déduit que F_a est C^1 sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$, et donc F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x+1)a^n = a \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x+1)a^{n-1} = a \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+1)a^n = aF_a(x+1)$$

On a donc : $\boxed{F_a \text{ qui est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x) = aF_a(x+1)}$

IV.2.e) $F_a(1)$ étant une somme de termes positifs non tous nuls $F_a(1) > 0$

Alors : $F_a(x) = \exp(x \ln(F_a(1)))$ qui est bien C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.

Alors $F'_a(x) = \ln(F_a(1))F_a(x)$

On en déduit que : $F'_a(0) = \ln(F_a(1))F_a(0)$ et comme $F_a(0) = 1$ alors $F'_a(0) = \ln(F_a(1))$

Avec la relation du d) on a : $F'_a(0) = aF_a(1)$.

En regroupant les deux égalités ci-dessus on obtient : $\ln(F_a(1)) = aF_a(1)$ et donc

$\boxed{F_a(1) \text{ est solution de } E_a}$

$$\text{IV.3.a) } G(a) = F_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} a^n$$

Comme G est une série entière de rayon de convergence $R \geq \frac{1}{e}$ (IV) 1) a)) alors :

$\boxed{G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[}$

De plus, $\boxed{G \text{ est strictement croissante sur } [0, \frac{1}{e}]}$ comme somme de fonctions croissantes.

IV.3.b) $G(0) = F_0(1) = 1$ et $G(\frac{1}{e}) = e$ d'après I.1.c)

On a donc, puisque G est croissante sur $[0, \frac{1}{e}]$: $\boxed{G([0, \frac{1}{e}]) = [1; e]}$

IV.3.c) Avec le IV.2.e) $F_a(1)$ est solution de (E_a) et avec le b) c'est la plus petite solution, donc :

$\boxed{\forall a \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}], F_a(1) = \alpha_a}$

IV.4) On a $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}}$ donc $C > 0$, donc, pour $y > 0$:
 $y^y = C \Leftrightarrow y \ln(y) = \ln(C) \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y} \ln(C) \Leftrightarrow \frac{1}{y}$ est solution de $E_{-\ln(C)}$

$1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow 0 \leq \ln(C) \leq \frac{1}{e} \Rightarrow -\frac{1}{e} \leq -\ln(C) \leq 0$ donc, d'après la question I) 1) $E_{-\ln(C)}$ admet une unique solution

On déduit des deux points précédentes que $y^y = C$ admet une unique solution y_0 et que $\frac{1}{y_0} = F_{-\ln(C)}(1)$ par le IV) 2)

On a alors : $y_0 = \frac{1}{F_{-\ln(C)}(1)} = (F_{-\ln(C)}(1))^{-1} = F_{-\ln(C)}(-1)$

On utilise l'expression sous forme de séries entière. Alors :

$$\begin{aligned} & y_0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-1)(-\ln(C))^n \\ &= P_0(-1) + P_1(-1)(-\ln(C)) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)(-1+n)^{n-1}(-\ln(C))^n \\ &= 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(n-1)^{n-1}(\ln(C))^n \end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu.