Lundi 15 septembre 2025

PSI* 2025-2026, Devoir surveillé de Mathématiques n°1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner une fleur en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Question de cours, Exercices proches du cours (questions indépendantes)

1°) Enoncer le théorème de prolongement de la fonction dérivée.

2°) Enoncer le théorème des accroissements finis.

3°) Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donner la définition de : "f est une fonction convexe sur I"

4°) Effectuer le développement limité en $x=0$, à l'ordre 3 de : $f(x) = \frac{sin(x)}{\sqrt{1+x}}$

5°) Calculer : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)dt$

6°) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}}$
a) Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$
b) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

Problème 1

On pose : $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x + e^x \end{array}$ et on note Γ la représentation graphique de f.

Etude de f

1°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2°) a) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $f(x) \sim e^x$

2°) b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - x\big)$

3°) a) Donner le développement limité de f, au voisinage de 0, à l'ordre 3.

3°) b) Donner une équation cartésienne de D la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

3°) c) Déterminer $f^{(3)}(0)$

3°) d) Justifier l'existence de $(f^{-1})'(1)$ et déterminer sa valeur.

4°) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

5°) Tracer l'allure de Γ.

Etude d'une suite

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n)$, u_n est donc l'unique solution de l'équation : $f(x) = n$

6°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f(0)$ et $f(ln(n))$ et en déduire que $0 \leq u_n \leq ln(n)$

6°) b) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $u_n = O(ln(n))$

6°) c) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $u_n = ln(n) + O(\frac{ln(n)}{n})$

7°) a) Donner un développement asymptotique de u_n, comme au 6°) c), mais avec un terme de plus.

7°) b) La série $\sum \big(u_n - ln(n)\big)$ est-elle convergente ?

Problème 2

Partie A : une première suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$

1°) ***(Calcul de** u_1**)***

1°) a) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}$

1°) b) Calculer $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt$, en utilisant le changement de variable $u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$

1°) c) Calculer u_1.

2°) ***(Etude de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**)***

2°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$

2°) b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2°) c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.

3°) ***(Etude de la série** $\sum u_n$**)***

3°) a) Pour $n \geq 2$, calculer $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt$ et montrer que, pour n au voisinage de $+\infty$: $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \sim \frac{1}{n}$

3°) b) Montrer que : $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{(1+t^3)^n}$

3°) c) Déterminer la nature de la série numérique : $\sum u_n$

4°) ***(Calcul de** ℓ**)***

4°) a) Montrer que $\ell \geq 0$

4°) b) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer que : $0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{1}{(1+\varepsilon^3)^n}$, puis déterminer ℓ

Partie B : une autre suite

5°) ***Définition de la suite*** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$)

Dans ce 5°), on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f_n(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \end{array}$

5°) a) Montrer que la fonction f_n est de classe C^1, et déterminer sa dérivée. En déduire les variations de f sur $[0,+\infty[$.

5°) b) Montrer que : $\forall x \geq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq u_n + arctan(x) - \frac{\pi}{4}$

5°) c) Montrer que l'on peut poser : $v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

6°) Calculer v_1

7°) ***(Une relation de récurrence sur*** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$***)***

En effectuant une intégration par partie dans $f_n(x) = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{(1+t^3)^n} \times 1\right) dt$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Partie C : un résultat intermédiaire

8°) a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_k \in]k, k+1[$, $ln(k+1) - ln(k) = \frac{1}{c_k}$

8°) b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - ln(n)$

9°) En utilisant le 8°), donner un encadrement de H_n et en déduire que (H_n) est bornée.

10°) a) Montrer que : $\forall x \in]0,1[$, $x + ln(1-x) \leq 0$

10°) b) Montrer que (H_n) est décroissante.

10°) c) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$, appelée "constante d'Euler", telle que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$

Partie D : un équivalent de v_n

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = ln(v_{n+1}) - ln(v_n) + \frac{1}{3}\frac{1}{n}$

11°) Montrer, pour n au voisinage de $+\infty$ que : $w_n = O(\frac{1}{n^2})$

12°) Montrer qu'il existe $C \in]0,+\infty[$ telle que : $v_n \sim \frac{C}{n^{1/3}}$

* * * * FIN DU SUJET * * * *