

Question de cours, Exercices proches du cours

1°), 2°) et 3°) Voir cours

$$\begin{aligned}
 4^\circ) & f(x) \\
 &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}} \\
 &= \sin(x)(1+x)^{-1/2} \text{ on utilise les DL usuel du cours} \\
 &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x + \frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)x^2 + o(x^2)) \\
 &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)) \\
 &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
 &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

On a donc, au voisinage de 0 : $\boxed{f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)}$

Remarque : comme le DL de $\sin(x)$ a son premier terme nul, on a pu se contenter de l'ordre 2 pour le DL de $\sqrt{1+x}$ car le x nous a permis de gagner un ordre.

$$5^\circ) A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = [\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{On a donc : } \boxed{A = \frac{\pi}{4}}$$

Remarque : on a linéarisé en utilisant les formules trigonométriques du cours.

$$6^\circ) \text{ a) Comme } \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et que } \sin(u) \sim u \text{ au voisinage de } u = 0, \text{ alors : } \sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}, \text{ donc } u_n \sim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ et donc : } \boxed{u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}}$$

$$6^\circ) \text{ b) } \begin{cases} u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ est convergente comme série de Riemann} \end{cases}$$

donc, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente}}$

Remarque : bien penser au signe quand on utilise la règle de l'équivalent.

Problème 1

1°) On remarque que f est de classe C^∞ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^x > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a, de plus que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vu les limites aux bornes, on a : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2°) a) $\frac{f(x)}{e^x} = xe^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, (par comparaison exp-puissance), donc par définition : $f(x) \sim e^x$

2°) b) $f(x) - x = e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$

3°) a) $f(x) = x + e^x$, on utilise le cours : $f(x) = x + (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))$ donc :
au voisinage de 0 : $f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

3°) b) On sait que l'équation de la tangente est donner par la partie d'ordre 1 (linéaire) du développement limité, donc : D a pour équation cartésienne $y = 1 + 2x$

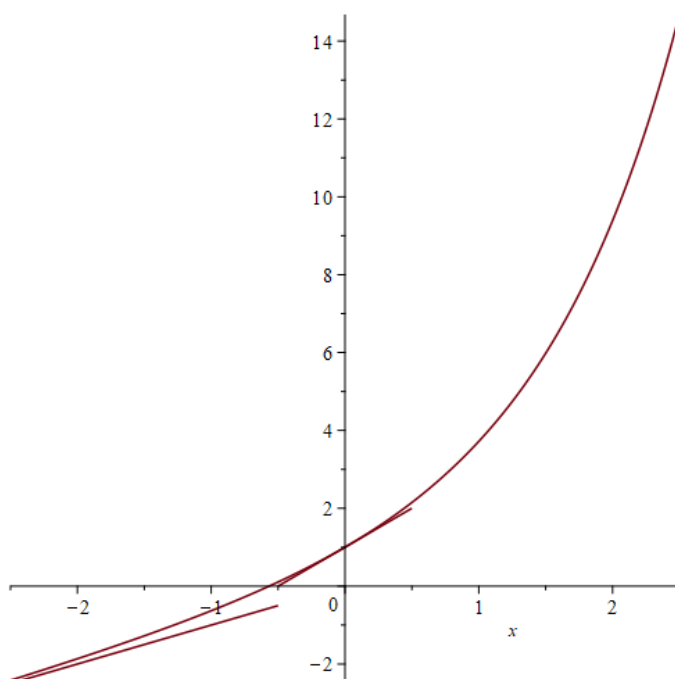
3°) c) f est C^∞ , donc son développement limité en 0 est donné par son développement de Taylor. Par identification avec le résultat du 3°) a) : $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6}$ donc : $f^{(3)}(0) = 1$

3°) d) f est une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Comme $f(0) = 1$ alors $f^{-1}(1) = 0$ et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

Donc : $(f^{-1})'(1)$ existe et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$

4°) f est deux fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x > 0$, donc, d'après le cours : f est convexe sur $\mathbb{R}$

5°) Ci-dessous : Γ ainsi que D et la droite $y = x$ (asymptote oblique)



6°) a) On a : $f(0) = 1$ et $f(\ln(n)) = \ln(n) + \exp(\ln(n)) = \ln(n) + n$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n \geq 1$ et $\ln(n) \geq 0$ donc $f(\ln(n)) \geq n$

On a donc : $f(0) \leq n \leq f(\ln(n))$ et comme f^{-1} est croissante : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \ln(n)}$

6°) b) D'après le a) : $0 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1$, donc la suite $(\frac{u_n}{\ln(n)})$ est bornée et par définition : $\boxed{u_n = O(\ln(n))}$

6°) c) $f(u_n) = n$

$$\Leftrightarrow u_n + e^{u_n} = n$$

$$\Leftrightarrow e^{u_n} = n - u_n \quad \text{on compose par } \ln \text{ (le membre de gauche est clairement strictement positif, donc celui de droite aussi)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n - u_n) \quad \text{on utilise le résultat du b)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n + O(\ln(n)))$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n(1 + O(\frac{\ln(n)}{n}))) \quad \text{propriété du } \ln$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n) + \ln(1 + O(\frac{\ln(n)}{n}))$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n) + O(\frac{\ln(n)}{n})$$

On a donc : $\boxed{u_n = \ln(n) + O(\frac{\ln(n)}{n})}$

7°) a) On repart de l'étape : $u_n = \ln(n - u_n)$ mais cette fois-ci on injecte le résultat du 6°)c) :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(n - \ln(n) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$

7°) b) D'après le 7°) a): $u_n - \ln(n) \sim -\frac{\ln(n)}{n} < 0$

Donc $\sum(u_n - \ln(n))$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ sont de même nature.

Mais, pour n assez grand : $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par comparaison : $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

En revenant au problème posé, par règle de l'équivalent, on a : $\boxed{\sum(u_n - \ln(n)) \text{ divergente}}$

Problème 2 : inspirer de ccINP TPC 2022

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \text{ a) } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} &= \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1} \\
 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} &= \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1} \\
 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad 1 &= a(t^2-t+1) + b(2t-1)(1+t) + c(1+t) \\
 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad 1 &= a(t^2-t+1) + b(-1+t+2t^2) + c(1+t) \\
 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad 1 &= a(t^2-t+1) + b(-1+t+2t^2) + c(1+t) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a - b + c \\ 0 = -a + b + c \\ 0 = a + 2b \end{cases} &\quad \text{par identification de 2 polynômes sur une infinité de valeurs} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 1 = -3b + c \\ 0 = 3b + c \\ 0 = a + 2b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -3b \\ 1 = -3b - 3b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \text{Donc : } \boxed{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(1+t)} - \frac{1}{6} \frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2-t+1}}
 \end{aligned}$$

1°) b) On effectue dans $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt$ le changement de variable dérivable $u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$

On a $2t-1 = \sqrt{3}u$ et donc $t = \frac{\sqrt{3}u+1}{2}$, alors $t^2 = \frac{3u^2+2\sqrt{3}u+1}{4}$, donc :

$$t^2 - t + 1 = \frac{3u^2+2\sqrt{3}u+1}{4} - \frac{\sqrt{3}u+1}{2} + 1 = \frac{3u^2+3}{4} = \frac{3}{4}(u^2+1)$$

De plus $dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du$

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt = \int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{4}(1+u^2)} \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan(u)]_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}}$$

1°) c) Avec le a) :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3(1+t)} - \frac{1}{6} \frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2-t+1} \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3(1+t)} - \frac{1}{6} \frac{(2t-1)}{t^2-t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt \\
 &= \left[\frac{1}{3} \ln(1+t) - \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt \\
 &= \frac{1}{3} \ln(2) + 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt
 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{u_1 = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$$

2°) a) On a : $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^3)^n} \leq 1$, donc, en intégrant entre 0 et 1 : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 1 dt = 1$

Donc $\boxed{0 \leq u_n \leq 1}$

2°) b) Par linéarité de l'intégrale :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^3)^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} \left(\frac{1}{1+t^3} - 1 \right) dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(1+t^3)^n} \left(\frac{-t^3}{1+t^3} \right)}_{\leq 0} dt$$

Donc, par positivité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

2°) c) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

$$3°) \text{ a) Pour } n \geq 2, \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt = \left[\frac{-1}{n-1} \frac{1}{(1+t)^{n-1}} \right]_0^1 = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}}$$

3°) b) Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq t^3 \leq t$ donc $0 \leq 1+t^3 \leq 1+t$ donc $0 \leq (1+t^3)^n \leq (1+t)^n$
donc $\boxed{\forall t \in [0, 1] , 0 \leq \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{(1+t^3)^n}}$

3°) c) En intégrant la relation du b) entre 0 et 1 on obtient : $0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \leq u_n$

Avec le a), comme $\frac{1}{n} > 0$ et que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, alors, par règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs : $\sum \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt$ est divergente.

On utilise alors l'inégalité ci-dessus et la règle de comparaison pour obtenir : $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$

4°) a) On sait que $u_n \geq 0$, donc, en passant à la limite, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors : $\boxed{\ell \geq 0}$

4°) b) On a déjà $0 \leq u_n$

• Comme $\varepsilon \in]0, 1[$, on écrit par la relation de Chasles : $u_n = \int_0^\varepsilon \frac{1}{(1+t^3)^n} dt + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$

• Pour $t \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^3)^n} \leq 1$ donc, en intégrant sur $[0, \varepsilon]$: $0 \leq \int_0^\varepsilon \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \leq \varepsilon$

• Pour $t \in [\varepsilon, 1]$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^3)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^3)^n}$ donc, en intégrant sur $[\varepsilon, 1]$:

$$0 \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \leq (1-\varepsilon) \frac{1}{(1+\varepsilon^3)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^3)^n}$$

• En combinant les deux points précédents : $\boxed{0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{1}{(1+\varepsilon^3)^n}}$

• En faisant tendre n vers $+\infty$, comme $0 \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^3)} < 1$ on obtient : $0 \leq \ell \leq \varepsilon$

Ce résultat étant valable pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on en déduit : $\boxed{\ell = 0}$

5°) a) f_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ comme primitive d'une fonction continue et $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n} \geq 0$

On en déduit donc : $\boxed{f_n \text{ croissante sur } [0, +\infty[}$

5°) b) • Comme $\forall t \geq 0$, $\frac{1}{(1+t^3)^n} \geq 0$, en intégrant sur $[0, x]$ on a, pour $x \geq 1$: $f_n(x) \geq 0$

• Pour $x \geq 1$, par la relation de Chasles :
$$f_n(x) = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt}_{u_n} + \int_1^x \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$$

Pour la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} t &\geq 1 \\ \Rightarrow 1 &\leq t^2 \leq t^3 \\ \Rightarrow 1 &\leq 1+t^2 \leq 1+t^3 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(1+t^3)^n} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

En intégrant entre 1 et x :
$$\int_1^x \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_1^x = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$$

• Comme $f_n(x) = u_n + \int_1^x \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$ on a donc : $f_n(x) \leq u_n + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$

• Bilan : $\boxed{\forall x \geq 1, 0 \leq f_n(x) \leq u_n + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}}$

5°) c) On a vu que $u_n \leq 1$ à la question 2°) a), comme $\arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ on a alors avec le 5°) b) : $0 \leq f_n(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$

Donc f_n est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$. $\boxed{\text{On peut donc poser } v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)}$

6°) Pour calculer v_1 on réutilise le calcul de u_1 (en particulier 1°)a) et b)) en changeant la borne 1 par x . On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt \\ &= \int_0^x \left[\frac{1}{3(1+t)} - \frac{1}{6} \frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2-t+1} \right] dt \\ &= \frac{1}{3} [\ln(1+t)]_0^x - \frac{1}{6} [\ln(t^2-t+1)]_0^x + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan(u)]_0^{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} [\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) - \frac{-\pi}{6}] \\ &= \frac{1}{6} \ln((1+x)^2) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} [\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) - \frac{-\pi}{6}] \\ &= \frac{1}{6} \ln(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}) + \frac{1}{\sqrt{3}} [\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) - \frac{-\pi}{6}] \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on a : $v_1 = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} [\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ et donc $\boxed{v_1 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}}$

7°) On suit l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{(1+t^3)^n} \times 1 \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{(1+t^3)^n} \times t \right]_0^x - \int_0^x ((-3t^2)(-n) \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \times t) dt \\ &= \frac{x}{(1+x^3)^n} - 0 + n \int_0^x \frac{3t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^3)^n} - 0 + n \int_0^x \frac{3(t^3+1-1)}{(1+t^3)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^3)^n} - 0 + n \left[\int_0^x \frac{3}{(1+t^3)^n} dt - \int_0^x \frac{3}{(1+t^3)^{n+1}} dt \right] \end{aligned}$$

On fait maintenant tendre x vers $+\infty$ et on obtient : $v_n = 0 + n(3v_n - 3v_{n+1}) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n$

La relation de récurrence cherchée est donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n}$

8°) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $t \mapsto \ln(t)$ qui est dérivable sur $]k, k+1[$ et continue sur $[k, k+1]$, donc par le théorème des accroissements finis : $\exists c_k \in]k, k+1[$, $\ln(k+1) - \ln(k) = (\ln)'(c_k)(k+1-k)$

Comme $(\ln)'(t) = \frac{1}{t}$ on a bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists c_k \in]k, k+1[, \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c_k}}$

8°) b) $c_k \in]k, k+1[\Rightarrow k < c_k < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c_k} \leq \frac{1}{k}$, donc avec le a) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

9°) • En sommant l'inégalité de gauche du 8°) pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n-1+1) - \ln(1) \text{ par télescopage} \\ \Rightarrow & \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n) \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1 \\ \Rightarrow & H_n \leq 1 \end{aligned}$$

• En sommant l'inégalité de droite du 8°) pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(n-1+1) - \ln(1) & \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \text{ par télescopage} \\ \Rightarrow \ln(n) & \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \frac{1}{n} & \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \\ \Rightarrow 0 & \leq H_n \end{aligned}$$

• On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq H_n \leq 1 \text{ et donc } (H_n) \text{ est bornée.}}$

10°) a) Posons : $\forall x \in [0, 1[$, $A(x) = x + \ln(1-x)$

A est dérivable et $A'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0$, donc A est décroissante sur $[0, 1[$ et comme $A(0) = 0$ alors $A(x) \leq 0$ pour $x \in [0, 1[$ et donc : $\boxed{\forall x \in]0, 1[, x + \ln(1-x) \leq 0}$

10°) b) Comme les sommes se télescopent :

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = A\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

(avec les notations du a)) et donc $H_{n+1} - H_n \leq 0$ puisque $\frac{1}{n+1} \in]0, 1[$

On en déduit : $\boxed{(H_n) \text{ décroissante.}}$

10°) c) Avec le a) et le b) on a que (H_n) est une suite décroissante minorée, donc convergente, donc

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, H_n = \gamma + o(1) \text{ et donc } \boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

11°) On reprend la relation de récurrence du 7°) : $v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}v_n$ qui s'écrit aussi $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{3}{n} \in]0, 1[$
On peut prendre le $\ln$ de cette égalité : $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln(1 - \frac{3}{n})$
et faire un DL : $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = -\frac{3}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) + \frac{3}{n} = O(\frac{1}{n^2})$

On a bien : $\boxed{w_n = O(\frac{1}{n^2})}$

12°) Avec la relation du 11°), comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, alors, par comparaison : $\sum w_n$ est convergente.

Donc $\exists K \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n w_k = K + o(1)$

Mais, par télescopage : $\sum_{k=1}^n w_k = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

On utilise le 10°) c) et la remarque précédente : $K + o(1) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1) + \frac{1}{3}(\gamma + \ln(n) + o(1))$

Donc : $\ln(v_{n+1}) = K + \ln(v_1) - \frac{1}{3}\gamma + o(1) - \frac{1}{3}\ln(n)$

On pose alors : $d = K + \ln(v_1) - \frac{1}{3}\gamma$ et on décale d'un indice : $\ln(v_n) = d + o(1) + \ln(\frac{1}{(n-1)^{1/3}})$

Mais $\ln(\frac{1}{(n-1)^{1/3}}) = \frac{1}{3}\ln(\frac{1}{n-1}) = \frac{-1}{3}\ln(n-1) = \frac{-1}{3}\ln(n(1-\frac{1}{n})) = \frac{-1}{3}\ln(n) - \frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{n}) = \frac{-1}{3}\ln(n) + o(1)$

Donc : $\ln(v_n) = d + o(1) + \ln(\frac{1}{(n)^{1/3}})$ et donc $v_n = e^{d + \frac{1}{n^{1/3}} + o(1)}$

Mais $\exp(o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc, par définition, en posant $C = e^d$:

$\boxed{\exists C \in \mathbb{R} , v_n \sim \frac{C}{n^{1/3}}}$