Suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants

a) Cas complexe

Théorème . *Soit* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et soit* F *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence linéaire :* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} + au_{n+1} + b_u n = 0.$

Définition. *L'équation* $E_c \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$ *est appelée* ***équation caractéristique****.*

Alors :

CAS 1 : E_c *admet deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2
Les éléments de F *s'écrivent alors :* $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

CAS 2 : E_c *admet une racine double* r_0
Les éléments de F *s'écrivent alors :* $u_n = (\alpha + \beta n) r_0^n$ *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

b) Cas réel

Théorème . *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et soit* F *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence linéaire :* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} + au_{n+1} + b_u n = 0.$

Définition. *L'équation* $E_c \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$ *est appelée* ***équation caractéristique****.*

Alors :

CAS 1 : E_c *admet deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2
Les éléments de F *s'écrivent alors :* $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

CAS 2 : E_c *admet une racine double réelle* r_0
Les éléments de F *s'écrivent alors :* $u_n = (\alpha + \beta n) r_0^n$ *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

CAS 3 : E_c *admet deux racines complexes conjuguées distinctes :* $\rho exp(i\theta)$ *et* $\rho exp(-i\theta)$ *avec* $\rho \in]0; +\infty[$ *et* $\theta \in]0; \pi[$
Les éléments de F *s'écrivent alors :* $u_n = \rho^n (Acos(n\theta) + Bsin(n\theta))$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Enoncé

Déterminer la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$

Correction

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 2$

D'après le cours, on a $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a2^n + b3^n$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3.2^n - 2.3^n}$

Enoncé

Déterminer les suite réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n$

Correction

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $x^2 - 4x + 8 = 0$
On a $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$ et les racines sont donc $X = 2 - 2i$ et $X = 2 + 2i$

$|2 + 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Alors : $2 + 2i = 2\sqrt{2}exp(i\frac{\pi}{4})$

D'après le cours, on a $\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (2\sqrt{2})^n(acos(\frac{n\pi}{4}) + bsin(\frac{n\pi}{4}))}$