A rendre le jeudi 2 octobre 2025

Devoir à la maison n°2 de Mathématiques

Code couleur :		
	noir	plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile

EXERCICE 1

a) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = sin(n)(ch(\frac{1}{n}) - 1)$

b) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$

c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{ln(n)}{n\sqrt{n}}$

On pourra comparer u_n avec $\frac{1}{n^{5/4}}$ (car $\frac{5}{4} \in]1, \frac{3}{2}[$)

EXERCICE 2 (e3A 2018 mathématiques 1 MP, exercice 1) : Constante d'Euler

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$ on note : $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f_n = h_n - ln(n)$
On considère la suite $(u_n)_{n in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} + ln(1 - \frac{1}{n})$.
On considère la suite $(v_n)_{n in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} - ln(1 + \frac{1}{n})$.

1°) Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'odre 2 en 0.

2°) Soit n un entier naturel non nul. Quel est le signe de u_n ?

3°) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

4°) Etudier la fonction $\begin{array}{cccc} f & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - ln(1+x) \end{array}$

5°) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente.

6°) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.
En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N} (v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier N supérieur ou égal à 3.

7°) Que peut-on dire des suites $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} v_n$

Dans la suite de l'exerice, on note γ la somme des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.
γ est appelée **constante d'Euler**.

8°) Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$

9°) Soit n un entier naturel non nul. Justifier que : $ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + ln(n)$

10°) Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

11°) Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite γ.

Indication : Exprimer les sommes partielles de la séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ en fonctions des termes de la suite (f_n).

A PARTIR DU 12°) : UNIQUEMENT pour les 5/2

12°) Soit r un entier naturel >1.
a) Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^r})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit a un nombre réel >0. Exprimer en fonction de a et de r : $I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^r}$

c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0 et telle que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

i) Soit a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait les inégalités : $a \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b$

ii) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N : $a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$

iii) En déduire l'encadrement : $-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$
ou I a été défini dans la question 12°) b)

iv) Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)$ est convergente et expliciter, en fonction de ℓ et r, sa limite.

13°) Démontrer qu'il existe un nombre réel α qu'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Indication : On appliquera les résultats de la question 12°) à une suite bien choisie.

EXERCICE 3 : Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Le but de l'exercice est de calculer $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1°) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^{\pi} f(t) sin(\frac{2n+1}{2}t)dt = 0$

2°) Pour $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} cos(kt)$. Montrer que : $A_n(t) = \frac{sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2sin(\frac{t}{2})}$

3°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \geq 1$: $\int\limits_0^{\pi} (at^2 + bt) cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$

4°) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$: $\int\limits_0^{\pi} (at^2 + bt) A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}$

5°) Montrer que : $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

6°) Montrer que les séries suivantes sont convergentes et les calculer à partir de A :
$B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $C = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$