Chapitre 5 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 5.1

Soit le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X]$
a) Quelle est la dimension de E ?
b) Dans E, calculer $(3, X^2 + X + 1) + 2(-2, X^2 - X + 1)$
On pose $\forall (a, P) \in E\ ,\ \varphi((a, P)) = a$
c) Montrer que φ est une forme linéaire, et montrer que $ker(\varphi)$ est un hyperplan de E isomorphe à $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction

a) D'après le cours $dim(E) = dim(\mathbb{R}) + dim(\mathbb{R}_2[X]) = 1 + 3 = 4$ donc $\boxed{dim(E) = 4}$

b) $(3, X^2+X+1)+2(-2, X^2-X+1) = (3+2(-2), (X^2+X+1+2(X^2-2X+1))) = (-1, 3X^2-3X+3)$

c) $\forall (a, P), (b, Q) \in E\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,$
$\varphi((a, P) + \lambda(b, Q)) = \varphi((a + \lambda b), (P + \lambda Q)) = a + \lambda b = \varphi((a, P)) + \lambda\varphi((b, Q))$
et donc φ est linéaire, comme l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire.}}$

$ker(\varphi)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc $ker(\varphi)$ est un hyperplan.
On a : $(a, P) \in ker(\varphi) \Leftrightarrow a = 0$ donc $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & ker(\varphi) \\ & & P & \mapsto & (0, P) \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
$\boxed{ker(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E \text{ isomorphe à } \mathbb{R}_2[X]}$

Enoncé, Exercice 5.2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E\ ,\ P(1) = P(-1)\}$ et $G = Vect(X)$
Montrer que $F \oplus G = E$

Correction

Etudions F : Soit $P = a + bX + cX^2 \in F$, alors $P(1) = P(-1) \Leftrightarrow a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow b = 0$
Si $b = 0$ alors $P = a + cX^2$ Donc $F = Vect(1, X^2)$

Soit $P \in F \cap G$. Alors $P \in G \Rightarrow P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$
Mais $P \in F \Rightarrow P(1) = P(-1) \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$ et donc $P = 0_E$
Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, comme l'autre inclusion est évidente : $F \cap G = \{0_E\}$ et donc $F + G = F \oplus G$

De plus, si $P = a + bX + cX^2 \in E$ alors : $P = (a + cX^2) + (bX)$ avec $a + cX^2 \in F$ et $bX \in G$ donc $P \in E$. Ceci pour tout $P \in E$ donc $E \subset F + G$ et comme l'autre inclusion est évidente : $E = F + G$

On a donc $\begin{cases} F + G = F \oplus G \\ E = F + G \end{cases}$ et donc $\boxed{F + G = F \oplus G}$

Enoncé, Exercice 5.3

Soit E un K espace vectoriel et E_1, E_2, $\dots$, E_p des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F = E_1 + E_2 + ...E_p$ est le plus petit sous espace vectoriel (au sens de l'inclusion) de E contenant tout les E_i.

Correction

• On a $F = E_1 + E_2 + ...E_p = \{\sum_{i=1}^{p} x_i \text{ avec } \forall i \in [\![1;p]\!]\ x_i \in E_i\}$
Donc $\forall x_i \in E_i$, $x_i = 0_E + \cdots + 0_E + x_i + 0_E + \cdots + 0_E$ avec $x_i \in E_i$ et $0_E \in E_j$ pour $j \neq i$.
On donc bien $E_i \subset F$.
On a donc F contient qui bien tout les E_i

• Réciproquement, soit G un sous espace vectoriel de E contenant tout les E_i, montrons alors que $F \subset G$.
Soit $x \in F$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $x_i \in E_i$
Mais chaque x_i est dans G puisque $E_i \subset G$.
Comme G est un sous espace vectoriel, alors, par combinaison linéaire $x \in G$.
On a bien $F \subset G$.

• Bilan : $\boxed{F = E_1 + E_2 + ...E_p \text{ est le plus sous-espace vectoriel contenant chaque } E_i.}$

Enoncé, Exercice 5.4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^2)$. Montrer que A admet un polynôme annulateur non nul de degré au plus n^2.

Correction

La famille $(A^k)_{k \in [\![0;n^2]\!]}$ est une famille de n^2+1 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n^2 < n^2+1$.
Cette famille est donc liée, donc $\exists (a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.
$P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est donc un polynôme annulateur de A, non nul et de degré $\leq n^2$.

Enoncé, Exercice 5.5

Soit φ l'endomorphisme de $E = M_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in E \quad \varphi(M) = 2M - M^T$
Calculer $det(\varphi)$ et $tr(\varphi)$

Correction

φ est clairement un endomorphisme. On sait que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, avec $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
De plus $M \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(M) = 2M - M = M$ et $M \in A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(M) = 2M + M = 3M$.
Dans une base adaptée à la somme directe $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ on a donc φ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 3I_{n^2-p} \end{pmatrix}$ avec $p = dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$

En passant par cette matrice : $\begin{cases} tr(f) = p + 3(n^2 - p) = 3n^2 - 2p = 3n^2 - n(n+1) = 2n^2 - n = n(2n-1) \\ det(f) = 1 \times 3^{(n^2-p)} = 3^{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{cases}$

On a donc $\boxed{tr(f) = n(2n-1) \text{ et } det(f) = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Enoncé, Exercice 5.6

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $u \in L(E)$ tel que $rg(u) = 1$
Montrer que $u^2 = tr(u)u$

Correction

$rg(u) = 1 \Rightarrow dim(Im(u)) = 1 \Rightarrow \exists e_1 \in E \ , \ Im(u) = Vect(e_1)$
On complète alors la famille libre (e_1) en $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E par le théorème de la base incomplète.
$\forall i \in [\![1;n]\!] \ , \ u(e_i) = a_i e_1$ puisque $u(e_i) \in Im(i) = Vect(e_1)$

La matrice de u relativement à B s'écrit : $M_B(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

Celle de u^2 d'écrit $M_B(u^2) = (M_B(u))^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \ldots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $tr(u) = tr(M_B(u)) = a_1$ et donc $M_B(u^2) = tr(u) M_B(u)$, en revenant aux endomorphismes : $\boxed{u^2 = tr(u)u}$