Chapitre 4 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, exercice 4.1

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Correction

$$\begin{aligned}
 P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = X \\ x + z = Y \\ x + y + z = Z \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - X \\ z = Y - x \\ x + (x - X) + (Y - x) = Z \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - Y + Z \\ y = -Y + Z \\ z = -X + 2Y - Z \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a donc :
 P inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Enoncé, exercice 4.2

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

Correction

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \text{ On fait } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & (y-x)(y+x) \\ 0 & z-x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}$$

On factorise la deuxième ligne par $y-x$ et la troisième par $z-x$

$$V = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & x+z \end{vmatrix}$$

Puis par un déterminant par blocs donne : $V = \begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & x+z \end{vmatrix} = (x+z) - (x+y) = z-y$

On a donc : $V = (y-x)(z-x)(z-y)$

Remarque : On peut aussi remarquer que c'est un déterminant de Vandermonde.

Enoncé, exercice 4.3

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$\text{On pose } P_n(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix}$$

$P_n(X)$ est le déterminant d'une matrice carrée de $M_{n+1}(\mathbb{R})$

Déterminer une expression développée de $P_n(X)$

Correction

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{R}$ que : $P_n(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^k$

Initialisation :

$$P_0(X) = \det((X + a_0)) = X + a_0$$

$$P_1(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ a_0 & X + a_1 \end{vmatrix} = X(X + a_1) + a_0 = X^2 + a_1 X + a_0$$

La récurrence est bien initialisée.

Hérédité : Pour $n \geq 1$, développons $P_n(X)$ par rapport à la première colonne. Alors :

$$P_n(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & -1 \end{vmatrix}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang précédent (et en décalant la suite) :

$$P_n(X) = X(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k) + (-1)^n a_0 (-1)^n \text{ mais } (-1)^n (-1)^n = 1$$

$$P_n(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^{k+1} + a_0$$

$$P_n(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Conclusion : On a bien : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^k$

Énoncé, exercice 4.4

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et on considère $B = (u, v, w)$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que B est une base de E .

Correction

Notons B_C la base canonique de E et calculons le déterminant de B relativement à B_C .

$$\det_{B_C}(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ par Sarrus.}$$

On en déduit que B est une base de E .

Énoncé, exercice 4.5

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x + 2y + z, x - y + z)$

1°) Montrer que f est linéaire.

2°) Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

3°) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Soit la base de $\mathbb{R}^3$: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et la base de $\mathbb{R}^2$: $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4°) Déterminer T la matrice de f relativement aux bases B et C .

Correction

1°) Soit $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x, y, z) + \lambda f(x', y', z') \\ &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (x + \lambda x' + 2(y + \lambda y') + z + \lambda z', x + \lambda x' - (y + \lambda y') + z + \lambda z') \\ &= (x + 2y + z, x - y + z) + \lambda(x' + 2y' + z', x' - y' + z') \\ &= f(x, y, z) + \lambda f(x', y', z') \end{aligned}$$

On a donc : $\forall ((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $f(x, y, z) + \lambda f(x', y', z') = f(x, y, z) + \lambda f(x', y', z')$

On en déduit que f est linéaire.

Remarque : on peut aussi utiliser la relation du 2°).

2°) Si on note $(X, Y) = f(x, y, z)$ alors
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$3^\circ) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

On en déduit que $\ker(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Par le théorème du rang : $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ et comme $\dim(\ker(f)) = 1$ alors $\dim(\text{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

Mais $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Donc $\ker(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

4°) Si on note P la matrice de passage de la base canonique à B et Q la matrice de passage de la base canonique à C .

Alors, par la formule de changement de bases : $T = Q^{-1}AP$

Après calculs :

$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Énoncé, exercice 4.6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = (i, j, k)$, on considère l'hyperplan $P = \text{vect}(u, v)$ avec $u = 2i + j + k$ et $v = i + k$.

Soit p la projection sur P parallèlement à $\text{vect}(w)$ avec $w = i - j + k$.

1°) Donner une équation cartésienne de P .

2°) Déterminer la matrice relativement à la base canonique de p .

Correction

1°) P a une équation de la forme $ax + by + cz = 0$

$$u, v \in P \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = -a \end{cases}$$

En prenant $a = 1$, on a que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne de P .

2°) Par définition et linéarité de p :

$$u \in P \Rightarrow p(u) = u \Rightarrow p(2i + j + k) = 2i + j + k \Rightarrow 2p(i) + p(j) + p(k) = 2i + j + k$$

$$v \in P \Rightarrow p(v) = v \Rightarrow p(i + k) = i + k \Rightarrow p(i) + p(k) = i + k$$

La projection est se fait parallèlement à $\text{vect}(w)$ donc

$$p(w) = 0 \Rightarrow p(i - j + k) = 0_E \Rightarrow p(i) - p(j) + p(k) = 0_E$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} 2p(i) + p(j) + p(k) = 2i + j + k \\ p(i) + p(k) = i + k \\ p(i) - p(j) + p(k) = 0_E \end{cases} \quad \text{on fait } L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(i) + p(j) + p(k) = 2i + j + k \\ p(i) + p(k) = i + k \\ p(j) = i + k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(i) + p(k) = i + j \\ p(i) + p(k) = i + k \\ p(j) = i + k \end{cases} \quad \text{on fait } L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(i) = j - k \\ p(k) = i - j + 2k \\ p(j) = i + k \end{cases} \quad \text{on fait } L_1 - L_2$$

On en déduit que la matrice de p relativement à la base canonique vaut

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Énoncé, exercice 4.7

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'endomorphisme f admettant $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

Correction

On remarque que $A^2 = A$ et donc que $f^2 = f$ et donc que f est une projection.

D'après le cours, c'est la projection sur $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\ker(f)$

Recherche de $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3y + z = 0 \\ -5x + 3y + z = 0 \\ -5x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5x + 3y + z = 0$$

Recherche de $\ker(f)$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 3y + z = 0 \\ -5x + 4y + z = 0 \\ -5x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{on fait } L_1 - L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

On a donc f qui est :

le projecteur sur le plan $-5x + 3y + z = 0$ parallèlement à la droite $\text{vect}(i + j + k)$