Chapitre 5 : Compléments espaces vectoriels, endomorphismes, matrices

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Produit d'espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel produit

Lemme. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, +_1, \times_1)$, $(E_2, +_2, \times_2)$, $\ldots$ et $(E_n, +_n, \times_n)$ des K espaces vectoriels.*
Alors $E = E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ muni :
de la loi interne $+$ définie par
$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \ , \ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2, \ldots, x_n +_n y_n)$
et de la loi externe $\times$ définie par $\forall \lambda \in K \ , \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \ , \ \lambda \times (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \times_1 x_1, \lambda \times_2 x_2, \ldots, \lambda \times_n x_n)$

est un K espace vectoriel.

preuve : admis ici parce que longue ...

Exemples. $(\mathbb{R}^2, +,) = (\mathbb{R}, +,) \times (\mathbb{R}, +,)$ $\qquad$ $(\mathbb{R}^5, +,) = (\mathbb{R}^2, +,) \times (\mathbb{R}^3, +,)$

Remarque. *Les E_i peuvent être de dimension quelconques ...*

1.2 Dimension

Lemme. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_1, E_2, $\ldots$ et E_n des K espace vectoriel* **de dimensions finies**.
Alors $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ est un K espace vectoriel de dimension finie et $dim(E_1 \times E_2 \cdots \times E_n) = \sum_{k=1}^{n} dim(E_k)$

preuve : On montre le principe pour $n = 2$ ...

2 Somme de sous espaces vectoriels

2.1 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe on généralise la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ \geq 2$. Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E.*
Alors on pose $F_1 + F_2 + ...F_n = \{x_1 + x_2 + ...x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \ , \ \forall k \in \{1..n\} \ , \ x_k \in F_k\}$

Lemme. *$F_1 + F_2 + ...F_n$ est un sous espace vectoriel de E*

preuve :

Remarques. *On note aussi : $F_1 + F_2 + ...F_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$.*
On a $\sum_{k=1}^{n} F_k = vect(\bigcup_{k=1}^{n} F_k)$
$F_1 + F_2 + ...F_n$ est le plus petit sous espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant tout les F_i

2.2 Somme directe

2.2.1 Cas général

Définition. *La somme F de p sous-espaces vectoriels F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i. Autrement dit :*
$\forall x \in F = F_1 + ... + F_p \ , \ \exists!(x_1, x_2, ..., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p \ , \ x = x_1 + x_2 + ... + x_p$

Remarque. *Si la somme est directe on note :* $F = F_1 + F_2 + ... + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$

Lemme. *(Caractérisation de la somme directe)*
$F_1 + ...F_p$ *est en somme directe*
si et seulement si $\forall (x_1, x_2, ..., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p \ , \ x_1 + x_2 + ... + x_p = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_p = \vec{0}$

preuve :

2.2.2 Cas particulier de deux sous espaces vectoriels

Théorème . *Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E. Alors on a équivalence des propositions suivantes :*

i) F *et* G *sont en somme directe.*

ii) $F \cap G = \{\vec{0}\}$

iii) $\forall f \in F \ , \ \forall g \in G \quad f + g = \vec{0} \Rightarrow f = g = \vec{0}$

iv) $\forall (f, f') \in F^2 \ , \ \forall (g, g') \in G^2 \quad , \quad f + g = f' + g' \Rightarrow f = f'$ *et* $g = g'$

Définition. *Si* $E = F \oplus G$ *on dit que F et G sont* **supplémentaires dans** E

2.2.3 Exemple

Lemme. *$S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $M_n(K)$.*
C'est-à-dire que : $M_n(K) = S_n(K) \bigoplus A_n(K)$

preuve :

2.3 Base adaptée à une somme directe

Lemme. *On considère $F_1, F_2, ..., F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie qui sont en somme directe.*
On considère pour tout k dans $\{1..p\}$, $(f_{k,1}, .., f_{k,dim(F_k)})$ une base de F_k.
Alors on obtient une base de $F = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$ par réunion des bases des sous espaces F_k, c'est-à-dire que $(f_{1,1}, .., f_{1,dim(F_1)}, f_{2,1}, .., f_{2,dim(F_2)}, ..., f_{p,1}, .., f_{p,dim(F_p)})$ *est une base de F.*

On a alors $dim(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i) = \sum_{i=1}^{p} dim(F_i)$ *et on dit que cette base est* **adaptée** *à la somme directe.*

Remarque. *En particulier si* $F = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$
alors $dim(F) = dim(F_1) + dim(F_2) + ... + dim(F_p)$.
En particulier si $E = F \oplus G$ *alors* $dim(E) = dim(F) + dim(G)$.

preuve :

2.4 Partition d'une base

Lemme. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possédant une base $\mathscr{B}$ que l'on fractionne ainsi :*

$$\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \ldots, e_{p_1}}_{\mathscr{B}_1}, \underbrace{e_{p_1+1}, \ldots, e_{p_1+p_2}}_{\mathscr{B}_2}, \ldots, \qquad , \ldots, \underbrace{e_{p_1+\ldots+p_{n-1}+1}, \ldots, e_{p_1+p_2+\ldots+p_n}}_{\mathscr{B}_n}).$$

Considérons les sous-espaces vectoriels $\begin{cases} E_1 = Vect(e_1, \ldots, e_{p_1}) \\ E_2 = Vect(e_{p_1+1}, \ldots, e_{p_1+p_2}) \\ \qquad \vdots \\ E_n = Vect(e_{p_1+\cdots+p_{n-1}+1}, \ldots, e_{p_1+p_2+\ldots+p_n}) \end{cases}$

Alors on a la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple. $\mathbb{R}_3[X] = Vect(1, X) \oplus Vect(X^2, X^3)$ *puisque* $(1, X, X^2, X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$

2.5 Dimension d'une somme

Lemme. *Soient* $E_1, \ldots, E_n$ *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *de dimension finie.*

Alors : $dim(\sum_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} dim(E_i)$
et la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ *est* **directe** *si et seulement si* $dim(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} dim(E_i)$

preuve :

3 Matrices par blocs

3.1 Présentation

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,p}(K)$, et soit $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $1 < q < n$ et $1 < r < p$

En notant A_1 la matrice de $M_{q,r}(K)$ de (i, j)ième terme $a_{i,j}$,
en notant A_2 la matrice de $M_{q,p-r}(K)$ de (i, j)ième terme $a_{i,j+r}$,
en notant A_3 la matrice de $M_{n-q,r}(K)$ de (i, j)ième terme $a_{i+q,j}$
et en notant A_4 la matrice de $M_{n-q,p-r}(K)$ de (i, j)ième terme $a_{i+q,j+r}$,

on peut écrire $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et on dit que l'on a écrit A par blocs.

Remarque. *On peut augmenter le nombre de blocs.*

3.2 Opérations par blocs

3.2.1 Combinaison linéaire et transposition

Lemme. *Soit* $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ *deux matrices découper en blocs comme dans le paragraphe précédent, soit* $\lambda \in K$.
Alors $A + \lambda B = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda B_1 & A_2 + \lambda B_2 \\ A_3 + \lambda B_3 & A_4 + \lambda B_4 \end{pmatrix}$ *et* $A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}$

3.2.2 Produit

Lemme. *Si l'on écrit par blocs les deux matrices* $A \in M_{n,p}(K)$ *et* $B \in M_{p,q}(K)$ *sous la forme*
$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ *de format* $\begin{pmatrix} (n_1, p_1) & (n_1, p_2) \\ (n_2, p_1) & (n_2, p_2) \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ *de format* $\begin{pmatrix} (p_1, q_1) & (p_1, q_2) \\ (p_2, q_1) & (p_2, q_2) \end{pmatrix}$
où $n_1, n_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ *sont des entiers strictement positifs tels que* $\begin{cases} n = n_1 + n_2 \\ p = p_1 + p_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$ *on peut effectuer le produit* AB
sous la forme $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$ *de format* $\begin{pmatrix} (n_1, q_1) & (n_1, q_2) \\ (n_2, q_1) & (n_2, q_2) \end{pmatrix}$

Remarque. *Si les formats sont compatibles on peut découper en plus de blocs ...*

3.2.3 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Lemme. *Soit* $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_q(K)$ *alors :* $det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{q,p}(K)} & C \end{pmatrix}) = det(A)det(C)$

3.3 Projections et symétries

3.3.1 Définitions

Définitions. *Soit* $s \in L(E)$. *Alors on dit que : s est une symétrie* $\Leftrightarrow s \circ s = Id_E$
Soit $p \in L(E)$. *Alors on dit que : p est un projecteur* $\Leftrightarrow p \circ p = p$

3.3.2 Projecteurs

On se place dans E un K espace vectoriel.

Théorème . *Soit p un projecteur de E. Alors $E = ker(p - Id_E) \bigoplus ker(p) = Im(p) \bigoplus ker(p)$.*
On dit que p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $ker(p)$.
Dans une base adaptée, p a une matrice de la forme :
$\begin{pmatrix} I_q & 0_{M_{q,n-q}(K)} \\ 0_{M_{n-q,q}(K)} & 0_{M_{n-q}(K)} \end{pmatrix}$

Remarque. *Si $E = A \oplus B$ alors $\forall x \in E \ \exists!(a, b) \in A \times B$, $x = a + b$ et l'application qui a x associe a est la projection sur A parallèlement à B.*
DESSIN :

preuve :

3.3.3 Symétries

Théorème . *Soit s une symétrie de E. Alors $E = ker(s - Id_E) \bigoplus ker(s + Id_E)$.*
On dit que s est la symétrie par rapport à $ker(s - Id_E)$ parallèlement à $ker(s + Id_E)$.
Dans une base adaptée, s a une matrice de la forme :
$\begin{pmatrix} I_q & 0_{M_{p,n-q}(K)} \\ 0_{M_{n-q,q}(K)} & -I_{n-q} \end{pmatrix}$

preuve :

Remarque. *Si $E = A \oplus B$ alors $\forall x \in E \ \exists!(a, b) \in A \times B$, $x = a + b$ et l'application qui a x associe $a - b$ est la symétrie sur A parallèlement à B.*
DESSIN :

3.4 Sous espace vectoriel stable

3.4.1 Définition

Définitions. *Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E et F un sous espace vectoriel de E.*
Alors on dit que F est stable par u si et seulement si $\forall x \in F$, $u(x) \in F$
L'endomorphisme de F : $\begin{array}{cccc} u|_F & : & F & \longrightarrow & F \\ & & x & \mapsto & u(x) \end{array}$ *est alors appelé endomorphisme induit par u sur F.*

Remarque. *On écrit aussi $u(F) \subset F$*

3.4.2 Un exemple

Lemme. *Soit u et v deux endomorphismes d'un K espace vectoriel E.*
Alors, si u et v commutent, le noyau de u est stable par v.

3.4.3 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E et F un sous espace vectoriel de E stable par u.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F que l'on complète en $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On a alors une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ (avec $G = vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$)
La matrice de u dans cette base est alors triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme : $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

3.5 Matrices diagonales par blocs

3.5.1 Cas général

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$.*
Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$ tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_q = n$

Si $f \in L(E)$ admet relativement à B la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_q \end{pmatrix}$

avec $\forall k \in [\![1;q]\!]$, $A_k \in M_{p_k}(K)$, alors les sous-espaces vectoriel $F_k = Vect(e_{p_1+\cdots+p_{k-1}+1}, \ldots, e_{p_1+\cdots+p_k})$ sont stables par f et $E = \bigoplus_{k=1}^{q} F_k$

3.5.2 Réciproquement

Lemme. *Si $f \in L(E)$ un K espace vectoriel de dimension finie tel que : $E = \bigoplus_{k=1}^{q} F_k$ et si les F_k sont stables par f, alors, dans une base adaptée à cette somme directe la matrice de f est de la forme* $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_q \end{pmatrix}$ *avec*

$\forall k \in [\![1;q]\!]$ $A_k \in M_{dim(F_k)}(K)$

3.5.3 Cas particulier d'une matrice triangulaire

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel de n, muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f \in L(E)$ telle que la matrice de f relativement à B soit triangulaire supérieure.*
Alors les sous-espaces vectoriels $F_k = Vect(e_1, \ldots, e_k)$ forment une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces stables de f.

4 Trace

4.1 Trace d'une matrice

Définition. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(K)$.*
Alors on appelle trace de A et on note $tr(A)$ le scalaire suivant : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Exemples. $tr(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}) =$ $\qquad$ $tr(I_n) =$

4.2 Propriétés

Propriétés. *Soit A et B deux matrices de $M_n(K)$, soit $\lambda \in K$. Alors :* $\begin{cases} i)\ tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B) \\ ii)\ tr(AB) = tr(BA) \\ iii)\ tr(A^T) = tr(A) \end{cases}$

preuve :

4.3 Corollaires

Corollaire. *La trace est une forme linéaire.*

Corollaire. *Deux matrices semblables ont même trace.*

Remarque. *On dit que deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont semblables si et seulement si $\exists P \in GL_n(K)$, $A = PBP^{-1}$*

preuve :

4.4 Trace d'un endomorphisme

4.4.1 Définition

Définition. *Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E de dimension finie.*
Alors on appelle trace de u et on note $tr(u)$ la valeur suivante : $tr(u) = tr(Mat_B(u))$ ou B est une base quelconque de E.

preuve de l'indépendance vis à vis de B dans la définition.

4.4.2 Propriétés

Proposition. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie.*
i) tr est une forme linéaire sur $L(E)$.
ii) $\forall(u,v) \in L(E)^2$, $tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$

Remarque. *Si $u \in L(E)$ et $v \in GL(E)$ alors $tr(v \circ u \circ v^{-1}) = tr(u)$*

4.4.3 Exemple

Exemple. *Trace d'un projecteur.*

Lemme. *Si p est un projecteur d'un K espace vectoriel de dimension finie alors : $rg(p) = tr(p)$*

5 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

5.1 Puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Définition. *Si u est un endomorphisme de E on définit la suite des puissances de u par :*
$$\begin{cases} u^0 = Id_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u \circ u^k \end{cases}$$

Remarque. *De même si $A \in M_n(K)$ on définit $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$*

Exercice. *Montrer que la suite des noyaux $Ker(u^k)$ est croissante pour l'inclusion, et que la suite des images $Im(u^k)$ est décroissante.*

5.2 Polynômes d'un endomorphisme

Définition. *Si u est un endomorphisme et si $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k \in K[X]$ alors on pose :*
$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_N u^N$$

Remarques. *On dit que $P(u)$ est un polynôme de l'endomorphisme u.*
De même, si $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k \in K[X]$ et si $A \in M_n(K)$, alors
on définit le polynôme en A $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_N A^N$

5.3 Propriétés

Proposition. *Soit $P \in K[X]$ et $u \in L(E)$ alors $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par u*

preuve :

Exercice. *Montrer que si $u, v \in L(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ et si $P \in K[X]$ alors $P(u)$ et v commutent et $ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par v.*

Lemme. *Si E est de dimension finie et si B est une base de E alors $Mat_B\big(P(u)\big) = P\big(Mat_B(u)\big)$*

preuve :

5.4 Autres propriétés

Théorème . *Soit* $u \in L(E)$, $(P,Q) \in K[X]^2$ *et* $\lambda \in K$ *alors* $\begin{cases} (P+Q)(u) = P(u)+Q(u) \\ (\lambda P)(u) = \lambda P(u) \\ 1_{K[X]}(u) = Id_E \\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) \end{cases}$

Remarque. *On peut appliquer ce résultat en remplaçant* u *par une matrice* A.

preuve :

5.5 Polynômes annulateurs

5.5.1 Définition

Définition. *Soit* E *un* K *espace vectoriel et* $u \in L(E)$ *et* $P \in K[X]$.
On dit que le polynôme P *est un polynôme annulateur de* u *si* $P(u) = 0_{L(E)}$

Définition. *Soit* $A \in M_n(K)$ *et* $P \in K[X]$.
On dit que le polynôme P *est un polynôme annulateur de* A *si* $P(A) = 0_{M_n(K)}$

Exemple. *Si* $f \in L(E)$ *est une symétrie alors un polynôme annulateur de* f *est :* $X^2 - 1$
Si $f \in L(E)$ *est un projecteur alors un polynôme annulateur de* f *est :* $X^2 - X$

5.5.2 Applications : calcul de l'inverse ou des des puissances de A au moyen d'un polynôme annulateur

Exemple. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, *alors* $X^2 - 5X + 6$ *est un polynôme annulateur de A, etc,* $A^n = ...$

6 Compléments : interpolation de Lagrange

6.1 Interpolation

6.1.1 Cadre du problème

On considère $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ points distincts de K et $(y_0, y_1, \dots, \dots, y_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ valeurs quelconques.

On cherche un polynôme $P \in K_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P(x_i) = y_i$

Définition. *On dit qu'un tel polynôme, est un polynôme interpolateur.*

6.1.2 Interprétation graphique

6.1.3 Mise en équation

Si on cherche P sous la forme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors le problème s'écrit :

$$\forall i \in [\![0;n]\!] \ , \ \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \Leftrightarrow V(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Avec $V(x_0, \dots, x_n)$ la matrice de Vandermonde, dont on sait que le déterminant est non nuls puisque les x_i sont distincts.

6.1.4 Théorème

Théorème . *Soit* $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ *points distincts de* K *et* $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ *valeurs quelconques, alors il existe un unique polynôme* $P \in K_n[X]$ *vérifiant :* $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

preuve :

6.2 Base des polynômes interpolateurs de Lagrange

6.2.1 Définition

Définition. *Soit* $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ *points distincts de* K.

Alors, on pose : $\forall j \in [\![0;n]\!]$, $L_j = \dfrac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}$

Les polynômes L_j *sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange.*

6.2.2 Propriétés

Propriété. *Les* L_j *sont des polynômes de* $K_n[X]$ *de degré* n *et* $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

preuve :

6.3 Coordonnées dans la base de Lagrange

Théorème . *La famille* $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ *est une base de* $K_n[X]$ *et* $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum\limits_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$

Corollaire. *L'unique polynôme de* $K_n[X]$ *vérifiant* $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ *est le polynôme :* $P = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i$

preuve :

6.4 Propriétés

Proposition. $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i = 1$

preuve :

6.5 Exemple

Considérons les trois points : $(0,1)$, $(2,5)$ et $(4,17)$.
$L_0(X) = \frac{(X-2)(X-4)}{8}$, $L_1(X) = \frac{-X(X-4)}{4}$ et $L_2(X) = \frac{(X(X-2)}{8}$.

$PIL(X) = 1L_0 + 5L_2 + 17L_2 = 1 + X^2$

Sommaire