A rendre le lundi 13 octobre 2025

Devoir à la maison n°3 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile

Exercice 1 : Exercice Oral ccINP PSI 2025 - Swann

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on pose : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ et $w_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

1) Rappeler le critère spécial pour les séries alternées.

2) Montrer que : $u_n \sim v_n \sim w_n$

3) Etudier la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$

Exercice 2

Déterminer, en fonction de $(a, b) \in]0; +\infty[^2$, la nature de la série suivante :
$\sum c_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$

Exercice 3 : Exercice Oral Mines-Télécom PSI 2025 - Yoan

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A_n(x))$

Exercice 4 : Exercice Oral ccINP PSI 2025 - Valentin

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $\begin{array}{cccc} \phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM \end{array}$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme.

2) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$: ϕ^k

3) Exemple : dans ce 3) uniquement, on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$

3) a) Déterminer la matrice de ϕ relativement à B.

3) b) Calculer $det(\phi)$ et $tr(\phi)$

4) Quel est le lien entre A inversible et ϕ inversible ?

5) Montrer que si A est une matrice de symétrie alors ϕ est une symétrie.

6) Montrer que si $rg(A) \geq 1$ alors $rg(\phi) \geq n$

7) Dans ce 7) on suppose que $n = 2$. Montrer alors que : $rg(\phi) = 2rg(A)$

8) (5/2 uniquement)

Montrer que : $sp(\phi) = sp(A)$

9) (5/2 uniquement)

a) Montrer que si A est diagonalisable alors : $det(\phi) = det(A)^n$

b) Peut-on généraliser ce résultat avec A quelconque ?