Lundi 6 octobre 2025

PSI* 2025-2026, Devoir surveillé de Mathématiques n°2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner une fleur en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

CONSIGNES PARTICULIERES

• Les parties écrit en noir, sont à FAIRE par TOUS
• Les parties écrites en bleu , sont **à FAIRE uniquement par les 3/2**.
• Les parties écrites en rouge , sont **à FAIRE uniquement par les 5/2**.
• Les parties écrites en vert , ne sont **PAS A FAIRE dans le cadre du DS** mais peut-être en DM ou en complément pour ceux qui veulent ...

Question de cours

1°) Donner la définition et la valeur du déterminant de Vandermonde.

2°) Donner la définion d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

Exercice 1

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ admettant C comme matrice relativement à la base canonique.

1°) Calculer $det(f)$ et $tr(f)$

2°) f est-il un automorphisme ?

3°) Déterminer, sous forme de vect, $ker(f)$ et $Im(f)$.

Exercice 2

On pourra utiliser sans justifications que $2 < e < 3$
On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$

1°) On note : $\forall n \geq 1,\ w_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$

a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$
b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \sim \frac{-1}{2n^2}$
c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ appelé **constante d'Euler**.

2°) Etudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{ln(t)}{t}$ sur $]0; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition. Tracer la représentation graphique de φ

3°) On note pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente. Est-elle absolument convergente ?
On pose alors : $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Majorer $|S_{2n} - S|$ et préciser si S_{2n} est une valeur approchée de S par défaut ou excès.

4°) On note pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}) - \frac{(\ln(n))^2}{2}$

a) Justifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int\limits_{n}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$
b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente.

5°) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:
$S_{2n} = 2(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}) - \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$ puis que
$S_{2n} = \ln(2)(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$

6°) Démontrer alors que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$

PROBLEME 1 : projecteurs

Dans ce problème E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
On note I_2 la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$.
$L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
On note $e = Id_E$ l'identité de E et O l'endomorphisme nul.
On rappelle que si $u \in L(E)$ vérifie $u^2 = u$, alors u est un projecteur de E (où l'on a posé $u^2 = u \circ u$).

Si u est un endomorphisme, on notera :
$rg(u)$ le rang de u , $tr(u)$ la trace de u , $Ker(u)$ le noyau de u et $Im(u)$ l'image de u.

Partie I : Exemples

1°) Dans ce 1°) uniquement, E est de dimension 2 et on considère $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
On considère $f \in L(E)$ défini par sa matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à $\mathscr{B}$.

1°) a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
1°) b) Déterminer le noyau et l'image de f.
1°) c) Calculer, en fonction de n les coefficients de $(I_2 + A)^n$ pour tout entier naturel n.

2°) Dans cette question uniquement, E est de dimension 3 et on considère $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose alors $D = Vect(u)$ et $P = Vect(v, w)$ avec $u = e_1 + 3e_2 - e_3$, $v = e_1 - e_3$ et $w = 2e_1 - e_2$.

2°) a) Donner une équation cartésienne de P relativement à $\mathscr{B}$.
2°) b) Déterminer la matrice, relativement à $\mathscr{B}$ de p le projecteur sur P parallèlement à D.

Partie II : Résultats classiques du cours

Dans cette partie il s'agit de **redémontrer** certains résultats déjà démontrés dans le cours.
On considère dans cette partie p un projecteur non nul de E tel que $p \neq e$.

3°) Montrer que : $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ et que $Im(p) = Ker(p - e)$

4°) En utilisant une base bien choisie, montrer que $rg(p) = tr(p)$

Partie III : u et $e - u$

On considère dans cette partie u un endomorphisme de E.

5°) Montrer l'équivalence : u est un projecteur $\Leftrightarrow e - u$ est un projecteur

6°) Montrer que si u est un projecteur alors on a : $Im(u) = Ker(e - u)$ et $Ker(u) = Im(e - u)$

Partie IV : Avec deux projecteurs

Dans cette partie, on considère u et v deux projecteurs de E non nuls et différents de e

7°) Montrer l'équivalence : $u+v$ est un projecteur $\Leftrightarrow u \circ v + v \circ u = O$

8°) Montrer que : $u \circ v + v \circ u = O \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = O$

9°) Montrer que : $u+v$ est un projecteur $\Leftrightarrow Im(v) \subset Ker(u)$ et $Im(u) \subset Ker(v)$

10°) Montrer qu'un endomorphisme $f \in L(E)$ commute avec u si et seulement si $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par f.

PROBLEME 2 : Produits infinis

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{R}$. On lui associe la suite (p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite. Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite.

Première partie

1°) Donner un exemple de suite (a_n) telle que (p_n) converge vers $p = 0$.
2°) Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.
3°) On suppose, dans cette question, qu'il existe un entier n_0 tel que : $a_n > 0$ pour tout $n > n_0$.

On pose, pour n strictement supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.
3°) a) Pour n strictement supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.
3°) b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.
3°) c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser, dans chacun de ces deux cas, la limite de la suite (p_n).

Dans tout ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

4°) On suppose, dans cette question, que, pour tout n, on a : $u_n \geqslant 0$.
Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5°) On suppose, dans cette question, que la série $\sum u_n$ converge.
5°) a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.
5°) b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6°) Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

7°) Étudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les trois cas suivants :

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

b) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

c) $a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$

8°) (uniquement 5/2 pour le moment) On rappelle que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose $a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

9°) Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k), \quad v_n = \frac{u_n}{p_n}.$$

9°) a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\frac{1}{p_n}$ et de $\frac{1}{p_{n-1}}$.

9°) b) On suppose, dans cette question, que la série $\sum u_n^2$ converge.

9°) b) i) Établir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

9°) b) ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-telle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

10°) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

11°) Soient α un réel strictement positif et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que, pour tout n, a_n soit non nul.

11°) a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

11°) b) On suppose que $\alpha = 1$.

Étudier la convergence de la série $\sum p_n$.

On pourra utiliser (sans la redémontrer) la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où

$$t_n = 1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$