

Exercice 1

a) Comme C est la matrice de f alors $\det(f) = \det(C)$ et $\text{tr}(f) = \text{tr}(C)$

On a facilement $\text{tr}(f) = 1 + 1 - 1 = 1$.

On fait $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour avoir $\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Par blocs : $\det(C) = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

On a donc : $\boxed{\text{tr}(f) = 1 \text{ et } \det(f) = 0}$

b) Comme $\det(f) = 0$ alors $\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme.}}$

$$\text{c) } C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

On a donc $\dim(\ker(f)) = 1$ et par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$$

Comme les deux premières colonnes de C sont dans $\text{Im}(f)$ et qu'elles sont clairement non colinéaires, alors, par la dimension, elles forment une base de $\text{Im}(f)$

On a donc : $\boxed{\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Exercice 2

1°) a) Pour x au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

1°) b) Par télescopage :

$$\begin{aligned} & w_{n+1} - w_n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } w_{n+1} - w_n \sim \frac{-1}{2(n+1)^2} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

$$\text{On a bien : } w_{n+1} - w_n \sim \frac{-1}{2n^2}$$

1°) c) $w_{n+1} - w_n \sim \frac{-1}{2n^2} < 0$ et $\sum \frac{-1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente
Donc par la règle de l'équivalent $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est convergente.

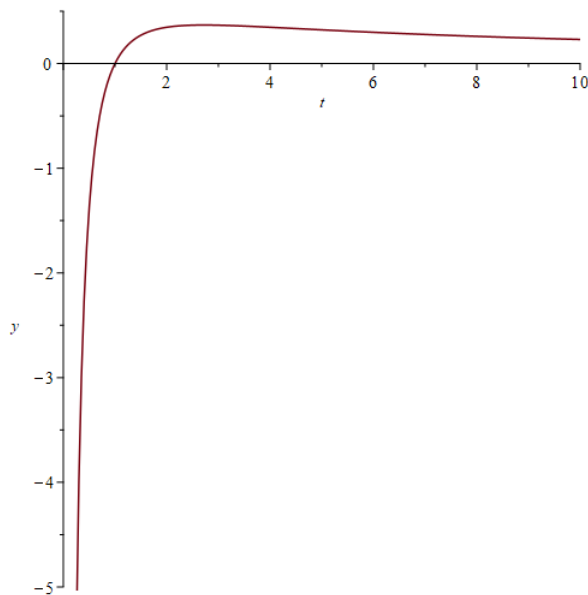
On en déduit d'après le cours que : (w_n) est convergente. On notera γ sa limite.

2°) φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\varphi'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$

On en déduit le tableau de variation :

t	0	e	$+\infty$
$\varphi'(t)$		+	0 -
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e} \searrow$	0

et la représentation graphique :



3°) a) • On remarque que $|u_n| = \varphi(n)$, donc avec le tableau de variation du 2°) on a : $(|u_n|)_{n \geq 3}$ décroissante.

Comme de plus $\sum_{n \geq 3} u_n$ est alternée et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, alors, par le théorème spéciale on a : $\sum_{n \geq 3} u_n$ convergente.

Comme les premiers termes ne changent pas la nature de la série : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

• On a : $\forall n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(e) = 1$ et donc $|u_n| \geq \frac{1}{n} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par comparaison : $\sum |u_n|$ est divergente.

On a alors : $\boxed{\sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

3°) b) D'après le théorème spécial dont on a vérifié les hypothèses au a), on a :

$$\boxed{|S_{2n} - S| \leq |u_{2n+1}| = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}}$$

On a : $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \leq 0$, on en déduit d'après le cours, que :

$\boxed{S_{2n} \text{ est une valeur approchée de } S \text{ par excès.}}$

4°) a) Comme pour $n \geq 3$ on a $[3; +\infty[\subset [e; +\infty[$ on en déduit que φ est décroissante sur $[n; n+1]$ et donc que $\forall t \in [n; n+1]$ $\varphi(n+1) \leq \varphi(t)$

En intégrant cette inégalité entre n et $n+1$ on a : $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$

et donc $\boxed{\forall n \geq 3 \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt}$

4°) b) On remarque d'abord que : $\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$

Pour $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} + \frac{(\ln(n))^2}{2} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$

Et donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ d'après le a), on en déduit que $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

Comme φ est décroissante sur $[3; +\infty[$ alors : $\forall k \geq 3 \quad \forall t \in [k; k+1] \quad \varphi(t) \leq \varphi(k)$

En intégrant entre k et $k+1$ on obtient : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k)}{k}$

En sommant de $k = 3$ à $k = n$ on obtient : $\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$

Par la relation de Chasles on a alors : $\int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \leq v_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \leq v_n$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2 - (\ln(3))^2 + \ln(2)}{2} \leq v_n$$

$$\text{Mais } (\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2 = (\ln(n+1) - \ln(n))(\ln(n+1) + \ln(n))$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln(n(n+1)) \sim \frac{\ln(n+n^2)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (v_n) est minorée par une suite ayant une limite et donc (v_n) est minorée.

Comme $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée : $\boxed{(v_n)_{n \geq 3} \text{ est convergente.}}$

5°) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$Prop_n \Leftrightarrow S_{2n} = 2\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Initialisation : Au rang 1 :

$$S_{2 \times 1} = S_2 = u_1 + u_2 = 0 + \frac{\ln(2)}{2}$$

D'autre part, si $n = 1$:

$$2\left(\sum_{k=1}^1 \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = 2\frac{\ln(2)}{2} - 0 - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

On a bien $Prop_1$

Hérédité : On suppose $Prop_n$ vraie. Alors :

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + u_{2n+1} + u_{2n+2} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = S_{2n} + 2\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}$$

En utilisant $Prop_n$:

$$S_{2(n+1)} = \left[2\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}\right] + 2\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}$$

$$S_{2(n+1)} = 2\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}\right) + 2\frac{\ln(2(n+1))}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}$$

$$S_{2(n+1)} = 2\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a bien $Prop_{n+1}$

On a donc démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} = 2\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Comme $\frac{\ln(2k)}{2k} = \frac{\ln(2)+\ln(k)}{2k}$ l'égalité précédente devient :

$$S_{2n} = \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}\right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On tient maintenant compte de la définition de v_n :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + \left(v_n + \frac{(\ln(n))^2}{2}\right) - \left(v_{2n} + \frac{(\ln(2n))^2}{2}\right) \\ &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} + \left(\frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}\right) \\ &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} + \left(\frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(2)+\ln(n))^2}{2}\right) \\ &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} + \left(\frac{(\ln(n))^2 - (\ln(2))^2 - 2\ln(2)\ln(n) - (\ln(n))^2}{2}\right) \\ &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} + \left(\frac{- (\ln(2))^2 - 2\ln(2)\ln(n)}{2}\right) \\ &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n) \end{aligned}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} = \ln(2)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$

6°) On sait d'après le 1°) c) que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ ce qui reporté dans la dernière égalité du 5°) donne : $S_{2n} = \ln(2)(\ln(n) + \gamma + o(1)) + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$
 $\Rightarrow S_{2n} = \ln(2)\gamma + o(1) - \frac{(\ln(2))^2}{2} + v_n - v_{2n}$

Mais comme (v_n) est convergente alors $v_{2n} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$

Comme $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$ on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$ et donc (S_n) est convergente (vers la même limite que (S_{2n}))

On en déduit que $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$

Problème 1

1°) a) On a : $M_{\mathcal{B}}(f \circ f) = A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = A = M_{\mathcal{B}}(f)$

On a donc $f^2 = f$ et donc f est un projecteur.

On remarque que la deuxième colonne de A est l'opposée de la première, donc $rg(f) = rg(A) = 1$

1°) b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$

On a donc $Ker(f) = vect(e_1 + e_2)$

De plus par le théorème du rang : $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E) = 2$ et comme $dim(Ker(f)) = 1$ alors $dim(Im(f)) = 1$ La première colonne de A nous donne donc une base de $Im(f)$.

Bilan : $Ker(f) = vect(e_1 + e_2)$ et $Im(f) = Vect(e_1 - 2e_2)$

1°) c) I_2 et A commutent on peut donc appliquer la formule du binôme et obtenir :

$$(I_2 + A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k = I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A \text{ puisque } A^k = A \text{ pour } k \geq 1$$

$$\text{Donc } (I_2 + A)^n = I_2 + \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right] A = I_2 + \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right] A = I_2 + [2^n - 1]A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{2^n - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}, (I_2 + A)^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 & 1 - 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$$

2°) a) Ecrivons une équation cartésienne de P sous la forme : $ax + by + cz = 0$

$$\text{Alors : } \begin{cases} v \in P \\ w \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 2a \end{cases}$$

En choisissant $a = 1$: une équation cartésienne de P est $x + 2y + z = 0$

2°) b) On a directement avec les caractéristique de $P : p(u) = 0, p(v) = v$ et $p(w) = w$

$$\text{Donc : } \begin{cases} p(e_1 + 3e_2 - e_3) = 0 \\ p(e_1 - e_3) = e_1 - e_3 \\ p(2e_1 - e_2) = 2e_1 - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(e_1) + 3p(e_2) - p(e_3) = 0 \\ p(e_1) - p(e_3) = e_1 - e_3 \\ 2p(e_1) - p(e_2) = 2e_1 - e_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $p(e_2) = \frac{1}{3}(-e_1 + e_3)$

Avec L_3 on obtient : $p(e_1) = \frac{1}{6}(5e_1 - 3e_2 + e_3)$ et avec L_2 on obtient : $p(e_3) = \frac{1}{6}(-e_1 - 3e_2 + 7e_3)$

On en déduit donc que : la matrice de p relativement à $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3°) • Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$

Alors $p(x) = 0_E$ et $\exists y \in E, x = p(y)$

Mais $0_E = p(x) = p(p(y)) = p^2(y) = p(y) = x$ car $p^2 = p$ et donc $x = 0_E$

On en déduit $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_E\}$, comme l'autre inclusion est évidente on a : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$ et donc $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

Comme la somme est directe : $\dim(\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(E)$ par le théorème du rang.

$$\text{Donc } \begin{cases} \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) \subset E \\ \dim(\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)) = \dim(E) \end{cases} \quad \text{et on en déduit } \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$$

• Soit $x \in \text{Im}(p)$ alors $\exists y \in E, x = p(y)$

Comme $p = p^2$ alors $p(x) = p(p(y)) = p^2(y) = p(y) = x$ donc $x - p(x) = (e - p)(x) = 0_E$

On a alors $x \in \text{Ker}(e - p)$ et donc $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(e - p)$

Soit $x \in \text{Ker}(e - p)$ alors $(e - p)(x) = 0_E \Rightarrow x - p(x) = 0_E \Rightarrow x = p(x)$ et donc $x \in \text{Im}(p)$

On a alors : $\text{Ker}(e - p) \subset \text{Im}(p)$

Par double inclusion : $\text{Im}(p) = \text{Ker}(e - p)$

Bilan : $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - e)$

4°) On choisit une base adaptée à la somme directe du 3°), donc de la forme $(e_1, \dots, e_k, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ avec les e_i dans $\text{Ker}(p)$ et les ϵ_j dans $\text{Im}(p)$.

On a par définition $u(e_i) = 0_E$. De plus $\epsilon_j \in \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - e)$ donc $(p - e)(\epsilon_j) = 0_E \Rightarrow p(\epsilon_j) = \epsilon_j$

Posons $K = \text{rg}(p) = \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\text{Ker}(p - e))$

Alors, dans la base ci-dessus la matrice de p est de la forme (matrice par blocs) : $\begin{pmatrix} 0_{M_n-K} & 0_{M_n-K} \\ 0_{M_{n-K}} & I_K \end{pmatrix}$

Il est alors facile de voir que $\text{rg}(p) = K = \text{tr}(p)$

On a bien : $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$

5°) $e - u$ est un projecteur

$$\Leftrightarrow (e - u)^2 = e - u \Leftrightarrow e^2 - 2u + u^2 = e - u \Leftrightarrow u^2 = u \Leftrightarrow u \text{ est un projecteur}$$

Remarque : on a utilisé que u et e commutent.

On a bien l'équivalence : $u \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow e - u \text{ est un projecteur}$

6°) Si on reprend le 3°) en remplaçant p par u et remarquant que $\text{Ker}(u - e) = \text{Ker}(e - u)$, on obtient : $\text{Im}(u) = \text{Ker}(e - u)$ Comme $e - u$ est aussi un projecteur on peut "remplacer" u par $e - u$ et on a : $\text{Im}(e - u) = \text{Ker}(e - (e - u)) = \text{Ker}(u)$

Donc si u est un projecteur on a : $\text{Im}(u) = \text{Ker}(e - u)$ et $\text{Ker}(u) = \text{Im}(e - u)$

7°) $u + v$ est un projecteur

$$\Leftrightarrow (u + v)^2 = u + v$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 + u \circ v + v \circ u = u + v \text{ mais } u = u^2 \text{ et } v = v^2 \text{ puisque l'on a des projecteurs}$$

$$\Leftrightarrow u + v + u \circ v + v \circ u = u + v \Leftrightarrow u \circ v + v \circ u = O$$

On a bien : Si u et v sont des projecteurs : $u + v$ est un projecteur $\Leftrightarrow u \circ v + v \circ u = O$

8°) • L'implication : $u \circ v = v \circ u = O \Rightarrow u \circ v + v \circ u = O$ est évidente, il nous faut montrer la réciproque.

• Supposons donc $u \circ v + v \circ u = O$. On compose à gauche par u et on obtient :

$$u \circ u \circ v + u \circ v \circ u = O \Rightarrow u^2 \circ v + (u \circ v) \circ u = O$$

Mais u est un projecteur donc $u^2 = u$ et par hypothèse $u \circ v = -v \circ u$

$$\text{Donc : } u \circ v - (v \circ u) \circ u = O \text{ et en réutilisant } u^2 = u \text{ alors } u \circ v - v \circ u = O$$

$$\text{On a donc les deux égalités : } \begin{cases} u \circ v + v \circ u = O \\ u \circ v - v \circ u = O \end{cases}$$

$$\text{En faisant } L_1 + L_2 \text{ et } L_1 - L_2 \text{ on obtient bien : } u \circ v = v \circ u = O$$

• Bilan : Si u et v sont des projecteurs : $u \circ v + v \circ u = O \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = O$

9°) • Supposons que $u + v$ est un projecteur.

En utilisant le 7°) et le 8°) on a : $u \circ v = v \circ u = O$. Alors :

$$y \in \text{Im}(v) \Rightarrow \exists x \in E, y = v(x) \Rightarrow u(y) = \underbrace{(u \circ v)(x)}_O = 0_E \Rightarrow y \in \text{Ker}(u) \text{ On a donc } \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$$

Par symétrie : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

• Supposons que : $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

Soit $x \in E$ alors $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0_E$ puisque $u(x) \in \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

De même $(u \circ v)(x) = 0_E$ et donc, en additionnant : $(u \circ v)(x) + (v \circ u)(x) = 0_E$

Finalement : $u \circ v + v \circ u = O$ et donc avec le 7°) $u + v$ est un projecteur.

• On a donc : $u + v$ est un projecteur $\Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

10°) • Supposons que f commute avec u .

Soit $x \in \text{Ker}(u)$ alors $u(f(x)) = f(\underbrace{u(x)}_{x \in \text{Ker}(u)}) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ est stable

par f .

Soit $y \in \text{Im}(u)$ alors $\exists x \in E, y = u(x)$. Alors $f(y) = (f \circ u)(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x)) \in \text{Im}(u)$.

Donc $\text{Im}(u)$ est stable par f .

• Supposons que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par f . Alors, comme à la question 4°), dans une base adaptée à $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ la matrice de f s'écrit (par blocs) $F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Comme celle de u s'écrit : $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_K \end{pmatrix}$ alors $FU = UF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et donc u et f commutent.

• Bilan : $\boxed{f \in L(E) \text{ commute avec } u \text{ si et seulement si } \text{Im}(u) \text{ et } \text{Ker}(u) \text{ sont stables par } f}$

Problème 2 : d'après e3A PSI 2003 math B

1°) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{2}$. Alors : $p_n = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\boxed{\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2} \text{ alors } p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$

2°) Si p_n converge vers $p \neq 0$, alors, à partir d'un certain rang N on a $p_n \neq 0$.

On peut donc calculer, pour $n > N$: $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k} = a_n$

Mais comme $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, on a aussi $p_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ et donc $a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{p} = 1$

$\boxed{\text{Si } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0 \text{ alors } (a_n) \text{ converge vers } 1.}$

3°) a) Soit $n \geq n_0$.

Alors $p_n = \prod_{k=1}^n a_k = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n_0} a_k \right)}_{p_{n_0}} \underbrace{\left(\prod_{k=n_0+1}^n a_k \right)}_{q_n}$ et donc $\boxed{\forall n \geq n_0, q_n = \frac{p_n}{p_{n_0}}}$

3°) b) On remarque pour commencer que l'on peut considérer la série $\sum \ln(a_n)$ car $a_n > 0$ pour $n \geq n_0$

Pour $n \geq n_0$ on a : $\ln(q_n) = \ln\left(\prod_{k=n_0+1}^n a_k\right) = \sum_{k=n_0+1}^n \ln(a_k)$

On en déduit que si $\sum \ln(a_k)$ est convergente alors $\ln(q_n)$ (somme partielle de la série $\sum \ln(a_k)$) est convergente, donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $\ln(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

Puis, par continuité de l'exponentielle : $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(a) > 0$

Avec la relation du a), on a : $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p = p_{n_0} \exp(a)$.

Mais $p_{n_0} \neq 0$ car les a_k sont non nuls (hypothèse), et $\exp(a) \neq 0$ donc $p \neq 0$

On a donc : $\boxed{\sum \ln(a_n) \text{ convergente} \Rightarrow (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul.}}$

3°) c) • Si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$, alors $\ln(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et donc, en passant par l'exponentielle $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a alors $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• Si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$, alors $\ln(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc, en passant par l'exponentielle, $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. On a alors $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$ (suivant le signe de p_{n_0})

4°) • Supposons que (p_n) converge vers $p > 0$.

Par définition $a_n \geq 1$, donc clairement $p_n \geq 1$ et on peut prendre le $\ln$ de p_n , on a alors $p \geq 1$ (donc $\ln(p)$ est défini) et on écrit, par continuité de $\ln$:

$$\begin{aligned} \ln(p_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p) \\ \Rightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(a_k) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p) \end{aligned}$$

La série $\sum \ln(1 + u_n)$ est donc convergente.

Mais (p_n) converge vers $p \neq 0$, donc, d'après le 2°) : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On a alors $\begin{cases} \ln(1 + u_n) \sim u_n \geq 0 \\ \sum \ln(1 + u_n) \text{ est convergente} \end{cases} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs.}$

• Réciproquement, supposons que $\sum u_n$ converge.

Alors $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on peut, comme ci-dessus, en déduire que $\sum \ln(1 + u_n)$ est convergente.

Par le même calcul que ci-dessus : $\ln(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a > 0$ et comme $\exp$ est continue $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a > 0$

• Bilan : $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si } \sum u_n \text{ converge}}$

5°) a) $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $a_n = 1 + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on peut donc considérer $\ln(a_n)$ pour n assez grand.

$$\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n)^2$$

On pose $v_n = \ln(a_n) - u_n = -\frac{u_n^2}{2} + o(u_n)^2 \sim -\frac{u_n^2}{2} \leq 0$

Donc, comme $\sum u_n^2$ est convergente, alors, par la règle de l'équivalent (séries à termes négatifs) on a $\sum v_n$ convergente.

On a alors $\begin{cases} \ln(a_n) = u_n + v_n \\ \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum v_n \text{ convergente} \end{cases}, \text{ donc } \sum \ln(a_n) \text{ est convergente et par le 3°)b) } p_n \text{ converge vers } p \neq 0$

Bilan : $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum u_n^2 \text{ convergentes} \Rightarrow (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul.}}$

5°) b) Si $\sum u_n^2$ diverge, alors, comme $u_n^2 \geq 0$, on a $\sum_{k=1}^n u_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Avec les notations ci-dessus, comme $v_n \leq 0$ au voisinage de $+\infty$ (deux équivalents ont même signe) on a :

$$a : \sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Comme $\ln(a_n) = u_n + v_n$ et que $\sum u_n$ est convergente, on en déduit $\sum \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et donc

$p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par le 3°)c))

Bilan : $\boxed{\sum u_n \text{ convergente et } \sum u_n^2 \text{ divergente} \Rightarrow (p_n) \text{ converge vers } 0.}$

6°) Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc, à partir d'un certain rang :
 $0 \leq |u_n| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$ et par la règle de comparaison, comme $\sum |u_n|$ est convergente, alors $\sum u_n^2$ est convergente et on peut appliquer le 5°) a) pour en déduire (p_n) converge vers un réel p non nul.

Bilan : $\boxed{\sum u_n \text{ absolument convergente} \Rightarrow (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul.}}$

7°) a) Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ alors $p_n = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \frac{1+k}{k} = \frac{\prod_{k'=2}^{n+1} k'}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

$\boxed{(p_n) \text{ diverge et } p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty}$

7°) b) • On pose $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$. On a : $|u_n| = f(n)$ avec $f : \begin{matrix} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \end{matrix}$

f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \frac{\ln(x)}{2}}{x^{3/2}}$, donc $f'(x) \leq 0$ sur $[e^2, +\infty[$
 De plus $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$

On a donc $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|)_{n > e^2} \text{ est décroissante} \\ |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{cases}$ donc, par le théorème spécial à certaines séries alternées,

$\sum u_n$ est convergente.

• $u_n^2 = \frac{(\ln(n))^2}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$ pour $n > e$.

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par règle de comparaison pour les séries à termes positifs : $\sum u_n^2$ est divergente.

• On a donc : $\sum u_n$ est convergente et $\sum u_n^2$ est divergente. On peut alors appliquer le 5°) b) et en déduire que $\boxed{(p_n) \text{ converge et } p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$

7°) c) On calcule, pour $n \geq 1$: $p_n = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2}$

Mais $\prod_{k=1}^n k = n!$ et $\prod_{k=1}^n 4 = 4^n$ donc $p_n = \frac{((\prod_{k=1}^n (2k+1))(\prod_{k=1}^n (2k-1)))}{4^n (n!)^2}$

$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et de même $\prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^n n!}$

On a donc $p_n = (\frac{(2n)!}{2^n n!})^2 (2n+1) \frac{1}{4^n (n!)^2} = \frac{((2n)!)^2 (2n+1)}{4^{2n} (n!)^4}$

On utilise maintenant la fameuse formule de Stirling : $N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N}$ donc :

$p_n \sim \frac{(\sqrt{2\pi} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n})^2 (2n+1)}{4^{2n} (\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^4} \sim \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \frac{2^{4n+1}}{4^{2n}} \frac{n^{4n+1} (2n+1)}{n^{4n+2}} \frac{e^{-4n}}{e^{-4n}} \sim \frac{2}{\pi}$

On en déduit que $\boxed{(p_n) \text{ converge et } p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{\pi}}$

8°) Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente alors $\int_0^n e^{-t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$

On pose alors : $u_n = a_n - 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Comme $\forall t \geq 1 \quad 0 \leq t \leq t^2 \Rightarrow -t^2 \leq -t$ et $\exp$ croissante alors : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall t \geq N, 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$

Donc $\forall n \geq N, 0 \leq -u_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [-e^{-t}]_n^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-n}$

Comme $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente, alors, par règle de comparaison, $\sum -u_n$ est convergente et donc $\sum u_n$ est convergente.

On a aussi : $0 \leq u_n^2 \leq (\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-n})^2 = \frac{4}{\pi} e^{-2n}$

Comme $\sum e^{-2n}$ est une série géométrique convergente, alors, par règle de comparaison, $\sum u_n^2$ est convergente.

On a $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergentes, donc avec la question 5°) a) : (p_n) converge vers une limite non nulle.

9°)a) On a : $\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 + u_n$. En divisant par $p_n \neq 0$ on a : $\frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{p_n} + \underbrace{\frac{u_n}{p_n}}_{v_n}$ et donc $v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}$

9°)b)i) On a $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ qui convergent. Alors par le 5°)a) la suite (p_n) qui converge vers $p \neq 0$. Puisque $p \neq 0$, on a donc la suite $(\frac{1}{p_n})$ qui converge vers $\frac{1}{p}$

Par le théorème suite-série on en déduit $\sum (\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n-1}})$ est convergente, et avec l'égalité du a) que

$\sum v_n$ est convergente.

9°)b)ii) Si on pose $u_n = \frac{1}{n}$ alors $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ et avec le 7°)a) $p_n = n + 1$.

Alors $v_n = \frac{u_n}{p_n} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

On a alors $\sum v_n$ convergente et $\sum u_n$ divergente.

La convergence de $\sum v_n$ n'implique pas celle de $\sum u_n$

10°) Voir 9°)b)ii)

11°) a) • On commence par traité le cas $c = 0$. Si $c = 0$, alors $u_n = 0$, donc $a_n = 1$, donc $p_n = 1$ et donc (p_n) ne converge pas vers 0.

• On suppose désormais que $c \neq 0$ et on pose $u_n = \sin(\frac{c}{n^\alpha})$.

Comme $\alpha > 0$ on a $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ ($c \neq 0$)

Cas 1 : $\alpha > 1$ donc $\sum \frac{c}{n^\alpha}$ est convergente comme série de Riemann et par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs on a $\sum u_n$ convergente.

Comme u_n est de signe constant au voisinage de $+\infty$, on a même $\sum u_n$ absolument convergente, donc avec le 6°) (p_n) converge vers $p \neq 0$

Cas 2 : $0 < \alpha \leq 1$

Alors avec l'équivalent ci-dessus et la règle de l'équivalent (u_n est de signe constant) $\sum u_n$ est divergente.

On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha > 0$ donc $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \sim u_n$ et on en déduit que $\sum \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$

suivant le signe de c .

On utilise alors le 3°)c).

Cas 2, 1: $c > 0$ Alors $\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Cas 2, 2: $c < 0$ Alors $\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Finalement (p_n) converge vers 0, seulement dans le cas 2,2

Bilan : (p_n) converge vers 0 si et seulement si $0 < \alpha \leq 1$ et $c < 0$

11°)b) On a $\alpha = 1$. On distingue alors 2 cas suivant le signe de c .

Cas 1 : $c > 0$ ou $c = 0$

Alors avec le 11°)a) on a (p_n) qui ne converge pas vers 0, donc $\sum p_n$ est grossièrement convergente.

Cas 2 : $c < 0$ (Cette fois, avec le 11°)a) $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la divergence n'est pas grossière)

$$\ln(1 + \sin(\frac{c}{n})) = \ln(1 + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

On pose alors : $A_n = \ln(1 + \sin(\frac{c}{n})) - \frac{c}{n}$

On vient de voir que $A_n = O(\frac{1}{n^2})$ donc, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, on a, par comparaison, $\sum A_n$ convergente.

$$\text{On a : } \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n [\ln(1 + \sin(\frac{c}{k})) - \frac{c}{k}] = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \sin(\frac{c}{k})) - \sum_{k=1}^n \frac{c}{k} = \ln(p_n) - c(t_n + \ln(n))$$

$$\text{On en déduit : } \ln(p_n) - c \ln(n) = ct_n + \sum_{k=1}^n A_k$$

Comme (t_n) est convergente et $\sum A_n$ est convergente, alors $(ct_n + \sum_{k=1}^n A_k)$ est convergente et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\ln(p_n) - c \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$

$$\text{Donc } \ln(\frac{p_n}{n^c}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$$

Par continuité de l'exponentielle : $\frac{p_n}{n^c} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\mu$ et donc $p_n \sim e^\mu n^c > 0$

Par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs on a $\sum p_n$ et $\sum n^c$ de même nature, donc, par les séries de Riemann: $\sum p_n$ est convergente si et seulement si $c < -1$ (on a bien $c < 0$)

Bilan : Si $\alpha = 1$ alors : $\sum p_n$ convergente si et seulement si $c < -1$