Feuille d'exercices n°16 : chap. 6

Exercice 151. *Déterminer la nature des intégrales suivantes :*

$A = \int_0^{+\infty} \frac{1+cos(ln(1+t^2))}{1+7t+2t^2}dt$ $\quad B = \int_0^{+\infty} \frac{arctan(t^2)}{t+t^2}dt$ $\quad C = \int_0^1 (\frac{1}{sin(t)} - \frac{1}{t})dt$ $\quad D = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

$E = \int_0^1 \frac{sh(t)}{t^2}dt$ $\quad F = \int_1^{+\infty} \frac{sh(t)}{t^2}dt$ $\quad G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ $\quad H = \int_0^{+\infty} \frac{1-cos(t)}{t^2}dt$

$I = \int_0^3 \frac{1}{t^2-t-2}dt$ $\quad J = \int_0^1 ln(sin(t))dt$ $\quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1-cos(t)}}{t}dt$ *(K dur)*

Exercice 152. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-\lambda t}dt$ est convergente.*

Exercice 153. *On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$*

a) Déterminer D le domaine de définition de Γ.
b) Montrer que : $\forall x \in D$, $\Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n)$.

Exercice 154. *Montrer la convergence et calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{xln(x)}{(1+x^2)^2}dx$*

Exercice 155. *($\star$) Déterminer $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_a^{2a} \frac{cos(t)}{sh(t)}dt$*

Exercice 156. *On définit les deux intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(t))dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos(t))dt$*
Montrer que : I et J sont convergentes, égales et donner leur valeur en calculant d'abord $I+J$.

Exercice 157. *($\star$)*

Soit f une fonction décroissante sur $[0;+\infty[$ et vérifiant : $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergente.

Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$

Exercice 158. *($\star$)*

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_3^{+\infty} \ln(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}})dt$

Exercice 159. *($\star$)*

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{th(3x)-th(x)}{x}dx$

Exercice 160. *Etudier la nature de $\sum \frac{1}{nln(n)}$*

Exercice 161. *($\star$)*
Etudier suivant $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha(ln(n))^\beta}$