Feuille d'exercices n°17 : chap. 6

Exercice 162. *a) Etudier l'intégrabilité sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto arctan(t)(1-th(t))$
b) Etudier l'intégrabilité sur $]0;1[$ *de la fonction* $t \mapsto sin(\frac{1}{t})$
c) Etudier l'intégrabilité sur $]0;1[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{ln(2t)}{\sqrt{2-t}}$

Exercice 163. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0,1]$ *on pose :* $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$

a) Pour $x \in [0,1]$, *calculer* $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ *et préciser* $I = \int_0^1 f(x)dx$.

b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

A-t-on $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ *?*

Exercice 164. *Etudier suivant les paramètres* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha + t^\beta}$

Exercice 165. *(⋆)*
Etudier suivant les paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $[1;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{|x^\alpha - 1|^\beta}$

Exercice 166. *(⋆)*
Etudier suivant les paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $[e;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (ln(t))^\beta}$

Exercice 167. *Convergence et calcul de* $\int_0^{+\infty} exp(-\lfloor t \rfloor)dt$

Exercice 168. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *montrer la convergence de* $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{sh(t)}dt$ *et étudier* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 169. (⋆)

Donner un équivalent "simple" au voisinage de 0^+ *de* $x \mapsto \int_x^1 \frac{dt}{(arctan(t))^2}dt$

Exercice 170. *Etablir la convergence et calculer* $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 171. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *on pose* $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$
Montrer que $I(a)$ *est convergente.*
Calculer $I(a)$ *après avoir effectuer le changement de variable* $u = \frac{1}{t}$

Exercice 172. *(⋆⋆ 5/2)*
Soit f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[0;1[$ *et à valeurs réelles.*
On suppose que f'^2 *est intégrable sur* $[0;1[$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$