A rendre le jeudi 13 novembre 2025

Devoir à la maison n°4 de Mathématiques

Code couleur :	noir	exo 1 et exo 2 pour réviser, après plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

Exercice 1 : Révisions DL, équivalent, fonction dérivée

a) Effectuer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de : $x \mapsto ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$
b) Effectuer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de : $x \mapsto \frac{x - sin(x)}{e^x - 1}$
c) Effectuer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 2 de : $x \mapsto ln(ch(x))$
d) Déterminer un équivalent, le plus simple possible, au voisinage de $x = 0$ de : $f(x) = \frac{e^{xln(x)} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$
e) Trouver un équivalent, le plus simple possible, pour n au voisinage de $+\infty$ de :
$u_n = \sqrt[3]{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^2 + 1}$
f) On pose : $\forall x > 0$, $f(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{1}{ln(t)} dt$
Montrer que la fonction ainsi définie est C^1 sur $I =]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 2 : Convergence de séries

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{ln(n)}{n^2}$ Déterminer la nature de $\sum u_n$
b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{ln(n+1)}{n+2}$ Déterminer la nature de $\sum u_n$
c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{cos(n)}{n^2}$ Déterminer la nature de $\sum u_n$
d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$ Déterminer la nature de $\sum u_n$

Exercice 3 : Convergence d'intégrale et intégrabilité

1°) a) Déterminer la nature de : $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin(\sqrt{x})}{x(x+1)} dx$

1°) b) Déterminer la nature de : $I_2 = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{sin(\sqrt{x})}{x(x+1)} dx$

1°) c) Déterminer la nature de : $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(\sqrt{x})}{x(x+1)} dx$

2°) Déterminer la nature de : $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$

3°) Déterminer la nature de $B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{\sqrt{t}} dt$

Problème 1 : Nilpotence

Dans cet exercice on note E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
On dira qu'un endomorphisme $u \in L(E)$ est **nilpotente** si et seulement si il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $u^k = O$ avec O l'endomorphisme nul sur E.

Si $u \in L(E)$ est nilpotent on pose $p = inf(\{k \in \mathbb{N}^*\ ,\ u^k = O\})$. On appelle cette valeur, **l'indice de nilpotence** de u.

On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotent de $L(E)$.

1°) (**Un exemple**)
Dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Montrer que la dérivation est nilpotente et donnée son indice de nilpotence.

2°) Soit $u, v \in \mathcal{N}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$
Montrer que $u \circ v \in \mathcal{N}(E)$ et $u + v \in \mathcal{N}(E)$

3°) Soit $u, v \in L(E)$. Montrer que $u \circ v \in \mathcal{N}(E) \Rightarrow v \circ u \in \mathcal{N}(E)$

4°) Soit $f \in \mathcal{N}(E)$ et p son indice de nilpotence.

4°) a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$

4°) b) Montrer alors que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E.

4°) c) Montrer que $p \leq n$.

5°) Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, montrer que $Id_E - u$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de u et de Id_E.

6°) Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ d'indice de nilpotence n.

Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7°) (d'après Mines-Ponts PC 2020)

a) Soit $u \in L(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0_E$, $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ et $u^{q-1}(y) \neq 0_E$. On suppose de plus que : $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre.
Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

b) Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, d'indice de nipotence p. En utilisant le a), montrer que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $Im(u^{p-1}) = Im(u) \cap ker(u)$ et $Im(u^{p-1})$ est de dimension 1.

Problème 2

Soit $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que : $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1°) a) Montrer que $C = AB$ est une matrice de projection.

1°) b) Déterminer $rg(AB)$

1°) c) Déterminer $ker(AB)$ et $Im(AB)$

2°) Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie E

2°) a) Montrer que $Im(u \circ v) \subset Im(u)$ et en déduire que $rg(u \circ v) \leq rg(u)$

2°) b) Montrer que : $rg(u \circ v) \leq rg(v)$

2°)c) Montrer que : $rg(u \circ v) \leq min(rg(u), rg(v))$

3°) Montrer que BA est de rang 2

4°) Montrer que $BA = I_2$

Problème 3 : Beceas 2024

Partie I : préambule Pour tout $n \geq 1$, on note : $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et en déduire que la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

2)a) Montrer qu'il existe une constante C, telle que, pour tout $n \geq 1$: $\left| ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2}$

2)b) En déduire que la série $\sum \left(ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right)$ est convergente, puis qu'il existe une constante γ telle que : $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Cette constante γ s'appelle constante d'Euler. Nous allons en étudier quelques propriétés.

Partie II : une expression intégrale de γ

L'objectif de cette partie est d'établir la formule : $(1) \Leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} ln(t)e^{-t}dt = -\gamma$

3) Montrer que : $\int\limits_0^{+\infty} ln(t)e^{-t}dt$ est convergente.

4)a) Montrer que : $\forall u \in]-1, +\infty[$, $ln(1 + u) \leq u$

4)b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $t \in [0, n]$, on a : $0 \leq (1 - \frac{t}{n})^{n-1} \leq ee^{-t}$

5) (uniquement 5/2 pour le moment)

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^n ln(t)(1 - \frac{t}{n})^{n-1} dt = \int\limits_0^{+\infty} ln(t) e^{-t} dt$

6) Montrer successivement les égalités :

$\int\limits_0^n ln(t)(1 - \frac{t}{n})^{n-1} dt = ln(n) + n \int\limits_0^1 ln(u)(1-u)^{n-1} du = ln(n) + \int\limits_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$

7) En déduire la formule (1)

Partie III : Lien avec la fonction "dzêta"

Pour tout $s > 1$, on pose : $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

8) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien définie et vérifie :

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq 1 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt$

En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$

9)a) Montrer que, pour tout $s > 1$, la série : $\sum n \big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \big)$ converge.

9)b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$

9)c) En déduire la formule : $\zeta(s) = s \int\limits_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt$

10) Montrer que, pour tout $N \geq 2$, on a : $\int\limits_1^N \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} dt = H_N - ln(N) - 1$

en déduire la formule : $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} dt = \gamma - 1$

11) En justifiant l'égalité : $\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int\limits_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{s+1}} dt$ conclure que (uniquement 5/2) :

$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $s \to 1^+$