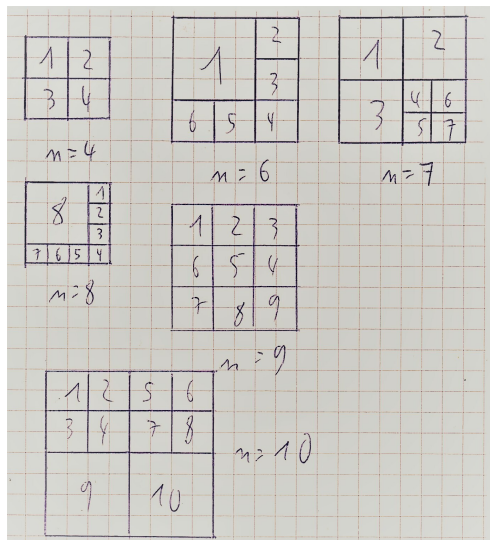


Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°1

EXERCICE 1

1°)



2°) Démontrons par une récurrence FORTE que pour $n \geq 6$ un carré est divisible en n carrés.

Initialisation : le 1°) permet de démontrer le résultat pour $n \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$

Hérédité : supposons que la propriété est vraie du rang 6 au rang n avec $n \geq 9$ (puisque le résultat est déjà démontré jusqu'au rang 10) et montrons la au rang $n+1$

On remarque que si l'on divise un carré (d'un premier partage), en 4, il y en a 3 de plus.
 $n+1-3=n-2$, on sait diviser un carré en $n-2$ carrés, on part de cette division et on divise un des $n-2$ carrés en 4, on a alors $n-2+3=n+1$ carrés, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : on a démontré par récurrence que $\forall n \geq 6$ un carré est divisible en n carrés.

3°) * Pour $n = 1$ le résultat est vraie et évident, on peut diviser un carré en un carré.

* Supposons que le carré ABCD soit divisible en n carrés et ait pour longueur de côté 1.

Si le carré contenant le coin A est de côté 1 alors il n'y a qu'un carré.

Si le carré contenant le coin A n'est pas de côté 1, il y a au moins un carré de plus pour le coin B, au moins un carré de plus pour le coin C et au moins un carré de plus pour le coin D. Il y a donc au moins 4 carrés.

Donc pas de solution pour $n = 2$ et $n = 3$.

* Supposons que le carré ABCD soit divisible en 5 carrés et ait pour longueur de côté 1.

Il y a donc au moins un carré par coin.

Si tous ces carrés ont pour côté $\frac{1}{2}$ alors ils recouvrent ABCD et $n = 4$ absurde.

Si tous ces carrés ont des côtés de longueurs $< \frac{1}{2}$ il en faut un de plus qui touche chaque côté donc $n > 5$ absurde.

Si un de ces carrés a un côté de longueur $> \frac{1}{2}$ (par exemple celui touchant le coin A), alors il y a au moins 6 carrés absurde. Le cas $n = 5$ est donc impossible.

Bilan : on peut diviser un carré en n carrés pour $n \in \{1, 4\} \cup [6; +\infty[$

EXERCICE 2 : CCP 2019 TSI

$$1^\circ) u_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi, u_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2t)}{2} \right] dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Donc : $\boxed{u_0 = \pi, u_1 = 2 \text{ et } u_2 = \frac{\pi}{2}}$

2°) $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n(t) \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale $\boxed{u_n \geq 0}$

$$u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt$$

L'intégrande étant négative sur l'intervalle d'intégration : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3°) Soit $n \geq 1$, on fait une intégration par parties avec des fonctions C^1 dans u_{n+1} .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \cos(t) dt \text{ on fait une IPP en primitivant le } \cos \text{ isolé} \\ &= [\cos^n(t) \sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n \sin(t) \cos^{n-1}(t) \sin(t) dt \\ &= 0 + n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= 0 + n(u_{n-1} - u_{n+1}) \quad \text{Donc } u_{n+1} = n(u_{n-1} - u_{n+1}) \text{ et donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}} \end{aligned}$$

4°) $v_{n+1} - v_n = (n+2)u_{n+2}u_{n+1} - (n+1)u_{n+1}u_n$

Mais, par le 3°) : $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ donc $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_n u_{n+1} - (n+1)u_{n+1}u_n = 0$ et donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Comme $v_0 = u_1 u_0 = 2\pi$ alors $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante et vaut } 2\pi}$

5°) $v_n = 2\pi \Rightarrow (n+1)u_{n+1}u_n = 2\pi$

Comme (u_n) est décroissante : $u_{n+1} \leq u_n$, on multiplie par $(n+1)u_{n+1}$ et on obtient $(n+1)u_{n+1}^2 \leq (n+1)u_{n+1}u_n$

En multipliant par $(n+1)u_n$ on obtient : $(n+1)u_{n+1}u_n \leq (n+1)u_n^2$

En regroupant les deux inégalités : $(n+1)u_{n+1}^2 \leq (n+1)u_{n+1}u_n = v_n \leq (n+1)u_n^2$

Et donc $\boxed{(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2}$

6°) L'inégalité de droite du 5°) donne : $\frac{2\pi}{n+1} \leq u_n^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n$ (puisque $u_n \geq 0$)

L'inégalité de gauche, décalée de 1, donne : $nu_n^2 \leq 2\pi \Rightarrow u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

On a donc : $\boxed{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$

7°) On déduit du 6°) que : $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq 1$ et donc, par encadrements : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = 1$ et donc

$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$

EXERCICE 3

1°) Comme, au voisinage de 0 : $\sin(x) = x + o(x^2)$ alors $f(x) = 1 + o(x)$
Donc en posant $\boxed{\alpha = 1}$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et donc f continue en 0.

2°) a) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1+o(x)-1}{x} = o(1)$ d'après le développement limité trouvé au 1°).

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ et donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$

2°) b) • f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions C^∞ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

• $f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$

Au voisinage de 0 : $f'(x) = \frac{(1+o(x))x - (x+o(x^2))}{x^2} = \frac{x+o(x^2)-x-o(x^2)}{x^2} = o(1)$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$

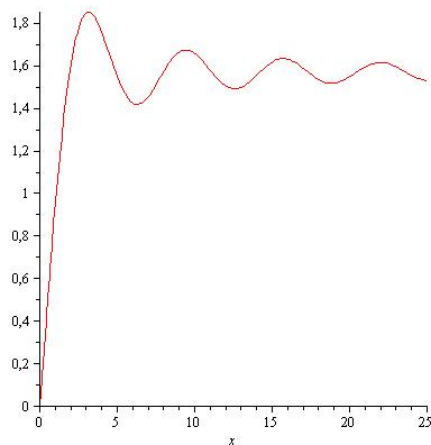
• On a donc f C^1 en 0 et donc $\boxed{f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

2°) c) Avec les séries entières ... on verra ça plus tard ...

3°) a) F est une primitive de f qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe C^1 et $F' = f$
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ il est donc immédiat d'avoir le signe de F'

x	$2k\pi$	$(2k+1)\pi$	$(2k+2)\pi$
$F'(x)$	0	+	0
$F(x)$	$F(2k\pi)$	$F((2k+1)\pi)$	$F((2k+1)\pi)$

3°) b)



4°) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = F(n\pi) = \int_0^{n\pi} f(t)dt$ En utilisant la relation de Chasles : $\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$

On effectue le changement de variable $t = u + k\pi$ dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$, on obtient : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt = \int_0^\pi f(u + k\pi)du$

Mais $f(u + k\pi) = \frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi} = (-1)^k \frac{\sin(u)}{u+k\pi}$ et donc $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du = u_k$

Finalement : $\boxed{\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k}$

4°) b) $\beta_n - \alpha_n = \theta_{2n+1} - \theta_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{2n-1} u_k = u_{2n}$ d'après le a)

Mais $u_{2n} = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+2n\pi} du$ et donc $u_{2n} \geq 0$ car la fonction que l'on intègre est positive.

Remarque : plus généralement, comme ci-dessus, on peut montrer que u_n est positive si n est paire et négative si n est impair.

On a donc $\beta_n - \alpha_n \geq 0$ et donc $\boxed{\beta_n \geq \alpha_n}$

4°) c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} du$

sur $[0; \pi]$ on a $\sin(u) \leq 1$ et $u + n\pi \geq n\pi$ et donc $\frac{1}{u+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$

Donc $|u_n| \leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} du = \frac{1}{n}$

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| \leq \frac{1}{n}}$

4°) d) $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \theta_{2n+2} - \theta_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n} = - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+1)\pi} du + \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+2n\pi} du$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \int_0^\pi \frac{2\pi \sin(u)}{(u+(2n+1)\pi)(u+2n\pi)} du$$

Et donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 0$ et donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \theta_{2n+3} - \theta_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+2)\pi} du - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+1)\pi} du$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \int_0^\pi \frac{-2\pi \sin(u)}{(u+(2n+2)\pi)(u+(2n+1)\pi)} du$$

Et donc $\beta_{n+1} - \beta_n \leq 0$ et donc $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

$\beta_n - \alpha_n = u_{2n+1}$ et par le c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n - \alpha_n = 0$

On déduit des trois points précédents que : $\boxed{\text{les suites } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

4°) e) Les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles convergent vers la même limite que l'on nommera λ .

On a alors, vu la définition de ces suites, que $\boxed{(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$ et converge vers λ

5°) Soit $x > 0$, on pose $n_x = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ (partie entière, on a : $\frac{x}{\pi} - 1 < n_x \leq \frac{x}{\pi} \Leftrightarrow x - \pi < \pi n_x \leq x$)

Alors $F(x) = \int_0^{n_x \pi} f(t) dt + \int_{n_x \pi}^x f(t) dt = \theta_{n_x} + \int_{n_x \pi}^x f(t) dt$

Mais $\left| \int_{n_x \pi}^x f(t) dt \right| = \left| \int_{n_x \pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \left| \int_{n_x \pi}^x \frac{1}{n_x \pi} dt \right|$ et comme $x - n_x \pi \leq \pi$ alors $\left| \int_{n_x \pi}^x f(t) dt \right| \leq \frac{1}{n_x}$

Donc comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = +\infty$ on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{n_x \pi}^x f(t) dt = 0$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta_{n_x} = \lambda$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lambda$

On a bien répondu à la question.

EXERCICE 4

Raisonnons par équivalences pour écrire le résultat sous une autre forme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$e - \frac{e}{2n} \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq e \Leftrightarrow \ln(e(1 - \frac{1}{2n})) \leq n \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \ln(e) \Leftrightarrow 1 + \ln(1 - \frac{1}{2n}) \leq n \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$$

On a utilisé la croissance du $\ln$

• Posons pour $x > 0$, $a(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$
 a est C^∞ et $a'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$

Donc a est croissante sur $]0; \infty[$, comme de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$ alors on en déduit $\forall x > 0, a(x) < 0$

Donc $\forall x > 0, \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln(1 + \frac{1}{x}) < 1 \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{x})^x \leq e$

On peut appliquer ce résultat à $x = n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + \frac{1}{n})^n \leq e$

• Posons $\forall x \geq 1, b(x) = 1 + \ln(1 - \frac{1}{2x}) - x \ln(1 + \frac{1}{x})$

b est C^∞ sur $[1; +\infty[$ et $b'(x) = \frac{\frac{1}{2x^2}}{1-\frac{1}{2x}} - \ln(1 + \frac{1}{x}) - x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x(2x-1)} - \ln(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} & b''(x) \\ &= \frac{-4x+1}{x^2(2x-1)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-4x+1}{x^2(2x-1)^2} + \frac{\frac{1}{x}}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(-4x+1)(x+1)^2 + (2x-1)^2 x(x+1) - x^2(2x-1)^2}{x^2(2x-1)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{(-4x+1)(x^2+2x+1) + (4x^2-4x+1)(x^2+x) - x^2(4x^2-4x+1)}{x^2(2x-1)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{(-4x^3-8x^2-4x+x^2+2x+1) + (4x^4+4x^3-4x^3-4x^2+x^2+x) - (4x^4-4x^3+x^2)}{x^2(2x-1)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{-11x^2-x+1}{x^2(2x-1)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

Mais $-11x^2 \leq 0$ et $-x+1 \leq 0$ car $x \geq 1$, donc $-11x^2 - x + 1 \leq 0$ et $b''(x) \leq 0$ sur $[1; +\infty[$

On en déduit b' décroissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} b'(x) = 0$ on en déduit $b'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$

On en déduit b croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$ on en déduit $b(x) \leq 0$ sur $[1; +\infty[$ et donc

$\forall x \geq 1, 1 + \ln(1 - \frac{1}{2x}) - x \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq 0 \Leftrightarrow e - \frac{e}{2x} \leq (1 + \frac{1}{x})^x$

Ce qui appliqué à $x = n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ permet d'obtenir : $e - \frac{e}{2n} \leq (1 + \frac{1}{n})^n$.

En combinant les deux inégalités trouvées précédemment on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, e - \frac{e}{2n} \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq e$