

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°2

EXERCICE 1

a) Comme : $|\sin(n)| \leq 1$ et que $ch(\frac{1}{n}) \geq 1 \Leftrightarrow ch(\frac{1}{n}) - 1 \geq 0$ on a : $0 \leq |u_n| \leq ch(\frac{1}{n}) - 1$
 Mais $ch(\frac{1}{n}) - 1 = 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - 1 = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$

On a donc $\begin{cases} u_n = O(\frac{1}{n^2}) \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann à termes positifs convergente car } 2 > 1 \end{cases}$

Donc, par domination : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

b) Posons :
$$\begin{array}{ccc} f & : & [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3}{1+x^4} \end{array}$$

Alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{3x^2(1+x^4) - 4x^3x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{3x^2 - x^6}{(1+x^4)^2}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$

On a donc $\exists A > 0$ tel que f est décroissante sur $[A, +\infty[$

On a donc : $\begin{cases} \text{la série } \sum u_n = \sum (-1)^n f(n) \text{ est alternée} \\ (f(n))_{n \geq A} \text{ est décroissante} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \end{cases}$ alors, par le théorème spécial à certaines séries

alternées on a : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{\frac{1}{n^{5/4}}} = n^{5/4} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{\ln(n)}{n^{3/2-5/4}} = \frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par comparaison $\ln$ -puissance.

On en déduit : $u_n = o(\frac{1}{n^{5/4}})$

Comme $\frac{1}{n^{5/4}} > 0$ et que $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ est une série de Riemann convergente ($5/4 > 1$), alors, par négligeabilité :

$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

EXERCICE 2 (e3A 2018 mathématiques 1 MP, exercice 1) : Constante d'Euler

1°) Comme $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ alors : $\boxed{[x \mapsto x + \ln(1 - x)] \text{ est définie sur }] - \infty, 1[}$

Au voisinage de 0, d'après le cours : $\ln(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc $\boxed{x + \ln(1 - x) \underset{x=0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$
 (développement de Taylor à l'ordre 2 en 0)

2°) Posons $\forall x \in [0, 1[$, $A(x) = x + \ln(1 - x)$

Alors, comme $0 \leq x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$ on a A est C^∞ sur son domaine et

$A'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$ sur $[0, 1[$

Mais $A(0) = 0$ et A est décroissante donc $A(x) \leq 0$ donc $x + \ln(1 - x) \leq 0$ sur $[0, 1[$

Comme pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in [0, 1[$ alors $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = A(\frac{1}{n}) \leq 0$. On ne vérifie pas ce résultat pour $u_1 = 1$!!! Donc $\boxed{\forall n \geq 2, u_n \leq 0 \text{ et } u_1 \geq 0}$

3°) Pour n au voisinage de $+\infty$: $u_n = \frac{-1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ en utilisant le 1°).

$$\text{Donc } \begin{cases} u_n \sim \frac{-1}{2n^2} < 0 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est convergente} \end{cases}.$$

Alors, par la règle de l'équivalent pour les séries de signe constant, on a : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

4°) La fonction f est définie et dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$
Donc f est croissante sur $[0, 1]$ De plus, comme $f(0) = 0$, alors f est positive sur $[0, 1]$ et on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] , x - \ln(1+x) \geq 0}$$

5°) Au voisinage de $+\infty$: $v_n = \frac{1}{n} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2} > 0$

$$\text{Donc } \begin{cases} v_n \sim \frac{1}{2n^2} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est convergente} \end{cases}.$$

Alors, par la règle de l'équivalent pour les séries de signe constant, on a : $\boxed{\sum v_n \text{ est convergente.}}$

6°) • Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & v_n - u_n \\ &= (\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})) - (\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})) \\ &= -\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n}) \\ &= -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) \\ &= -\ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n) \\ &= 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$v_1 - u_1 = 1 - \ln(2) - 1 = -\ln(2)$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall n \geq 2 , v_n - u_n = 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1) \text{ et } v_1 - u_1 = -\ln(2)}$$

• Pour $N \geq 3$, on en déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N (v_n - u_n) \\ &= (v_1 - u_1) + \sum_{n=2}^N [2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)] \\ &= -\ln(2) + 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) \\ &= -\ln(2) + 2(\ln(2) + \sum_{n=3}^{N-1} \ln(n) + \ln(N)) - (0 + \ln(2) + \sum_{n=3}^{N-1} \ln(n)) - (\sum_{n=3}^{N-1} \ln(n) + \ln(N) + \ln(N+1)) \\ &= -\ln(2) + 2\ln(2) + 2\ln(N) - \ln(2) - \ln(N) - \ln(N+1) \\ &= \ln(\frac{N^2}{N(N+1)}) = \ln(\frac{N}{N+1}) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\text{Pour } N \geq 3 , \sum_{n=1}^N (v_n - u_n) = \ln(\frac{N}{N+1})}$$

7°) Posons : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $U_N = \sum_{n=1}^N u_n$ et $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$

Comme $\forall n \geq 2$, $u_n \leq 0$ (2°) alors (U_N) est décroissante.

Comme $\forall n \geq 2$, $v_n \geq 0$ (4°) alors (V_N) est croissante.

D'après 6°) : $U_N - V_N = \ln\left(\frac{N}{N+1}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

On en déduit que : (U_N) et (V_N) sont adjacentes.

On sait d'après le cours que deux suites adjacentes ont même limite donc : $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} v_n$

8°) Vu l'adjacence des deux suites : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_1 < V_n \leq \gamma \leq U_n < U_1$

Comme $V_1 = 0$ et $U_1 = 1$ on en déduit bien : $\gamma \in]0, 1[$

9°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, alors $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ pour obtenir :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \text{ et donc } \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

Si on somme de $k = 1$ à $k = n \in \mathbb{N}^*$ on obtient : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

On utilise la relation de Chasles dans l'intégrale donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Ce qui donne : $h_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq h_n$

On a déjà $\ln(n+1) \leq h_n$ avec l'inégalité de droite.

En décalant les indices de 1 dans l'inégalité de gauche on obtient : $h_n - 1 \leq \ln(n)$

En regroupant les deux inégalités on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$

$$\begin{aligned} & 10^\circ) f_{n+1} - f_n \\ &= [h_{n+1} - \ln(n+1)] - [h_n - \ln(n)] = h_{n+1} - h_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

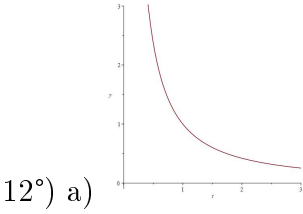
Dans le 2°) on a montrer que $x + \ln(1-x) \leq 0$ sur $[0, 1[$, on l'applique ici à $x = \frac{1}{n+1} \in]0, 1[$

On a donc $f_{n+1} - f_n \leq 0$ et on en déduit que : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

11°) On a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n u_k \\ &= u_1 + \sum_{k=2}^n u_k \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) - \ln(k)] \\ &= h_n + \sum_{k=1}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) \text{ par télescope} \\ &= (f_n + \ln(n)) - \ln(n) = f_n \end{aligned}$$

On a en déduit donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$



12°) a)

12°) b) Soit $A > a$.

$$\int_a^A \frac{dt}{t^r} = \left[\frac{-1}{(r-1)t^{r-1}} \right]_a^A = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}} - \frac{1}{(r-1)A^{r-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(r-1)a^{r-1}} \text{ puisque } r > 1$$

On a donc démontré la convergence de $I(a)$ et montrer que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall a > 0, I(a) = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}$

12°) c) i) Par définition de la limite $n^r(w_{n+1} - w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow \ell - \epsilon \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq \ell + \epsilon]$

En prenant $\epsilon > 0$ tel que $a < \ell - \epsilon < \ell + \epsilon < b$ (possible car $a < \ell < b$) on a alors :

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow a \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b]}$$

12°) c) ii) • Soit $k \geq N$. Alors, comme $t \mapsto \frac{1}{t^r}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^r} \leq \frac{1}{t^r} \leq \frac{1}{k^r} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^r} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq \frac{1}{k^r} \text{ en intégrant entre } k \text{ et } k+1$$

• L'inégalité de droite donne : $a \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq \frac{a}{k^r}$ et avec l'inégalité du i) :

$$a \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{k+1} - w_k$$

On somme maintenant pour k variant de N à n avec $n \geq N$: $a \sum_{k=N}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq \sum_{k=N}^n (w_{k+1} - w_k)$

Par télescopage et relation de Chasles on obtient : $a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{n+1} - w_N$

• L'inégalité de gauche donne : $\frac{b}{(k+1)^r} \leq b \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt$

En décalant les indices de 1 ($k = k+1'$), on a : $\frac{b}{k^r} \leq b \int_{k-1}^k \frac{1}{t^r} dt$ et avec l'inégalité du i) : $w_{k+1} - w_k \leq b \int_{k-1}^k \frac{1}{t^r} dt$

On somme maintenant pour k variant de N à n avec $n \geq N$: $\sum_{k=N}^n (w_{k+1} - w_k) \leq b \sum_{k=N}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^r} dt$

Par télescopage et relation de Chasles on obtient : $w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt$

• En regroupant les deux inégalités : $\forall n \geq N, a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt$

12°) c) iii) Par convergence des intégrales et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, en passant à la limite dans la relation du ii) on obtient : $aI(N) \leq 0 - w_N \leq bI(N-1)$ et donc $\boxed{-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)}$

12°) c) iv) En utilisant le résultat de 12°)b) et celui du iii) on a :
 $-b \frac{1}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leq w_N \leq -a \frac{1}{(r-1)N^{r-1}} \Rightarrow -b \frac{1}{(r-1)} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{r-1} \leq N^{r-1}w_N \leq -a \frac{1}{(r-1)}$

Soit $\epsilon > 0$. Si ϵ est suffisamment petit, on peut choisir $a = \ell - \epsilon$ et $b = \ell + \epsilon$
Et on a alors, en remarquant que la relation précédente est valable pour tout $n \geq N$:

$$-(\ell + \epsilon) \frac{1}{(r-1)} \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \leq n^{r-1}w_n \leq -(\ell - \epsilon) \frac{1}{(r-1)}$$

On a alors : $\forall \epsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, [n \geq N' \Rightarrow -\frac{\ell}{r-1} - \epsilon \leq n^{r-1}w_n \leq -\frac{\ell}{r-1} + \epsilon$

On a donc par définition de la limite : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r-1}w_n = \frac{-\ell}{r-1}}$

13°) • Recherche : on veut du $\frac{\alpha}{n}$ donc $r-1=1$, on prendra $r=2$... on garde $\frac{\alpha}{n}$ à droite dans l'égalité voulue et on passe à gauche le reste : $\underbrace{h_n - \ln(n)}_{f_n} - \gamma = \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$...

• On est donc amené à poser : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = f_n - \gamma$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } & n^2(w_{n+1} - w_n) \\ &= n^2(f_{n+1} - f_n) \text{ on utilise le calcul du 10°) } \\ &= n^2\left(\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= n^2\left(\frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)\right) \\ &= n^2\left(\frac{-1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \\ &\sim \frac{-n^2}{2(n+1)^2} \\ &\sim \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ (n^2w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} < 0 \end{cases}$$

On peut donc appliquer le 12°) ($r=2, \ell = \frac{-1}{2}$) (quitte à changer w_n en $-w_n$ pour régler le problème de signe de ℓ) et obtenir $n^{2-1}w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ell}{r-1} = \frac{1}{2}$

Donc $w_n = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ et en réutilisant la définition de $w_n = f_n - \gamma = h_n - \ln(n) - \gamma$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

EXERCICE 3 : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1°) Lemme de Lebesgue (voir exercice)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. On intègre par partie, comme f est dérivable :

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = \left[\frac{-f(t)2\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2n+1} \right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$$

On utilise que $|\cos(\frac{2n+1}{2}t)| \leq 1$ et qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\forall t \in [0, \pi]$, $|f'(t)| \leq M$ puisque f' est continue sur le segment $[0, \pi]$ (théorème des bornes atteintes).

$$\text{On a alors : } \left| \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \leq \frac{2|f(\pi)|+2|f(0)|}{2n+1} + \frac{2M\pi}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{On en déduit par encadrements : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0}$$

2°) Soit $t \in]0, \pi]$ et $n \geq 1$. Alors :

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k\right)$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} ($e^{it} \neq 1$ puisque $t \in]0, \pi]$)

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1-(e^{it})^n}{1-e^{it}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(e^{it(1+n/2-1/2)} \frac{-2i\sin(nt/2)}{-2i\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(e^{it((n+1)/2)} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\text{Donc } A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t) + \sin(-t/2)}{2\sin(t/2)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

$$\text{On obtient donc : } \boxed{\forall t \in]0, \pi], \forall n \in \mathbb{N}^*, A_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin(\frac{t}{2})}}$$

3°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt \\ &= [(at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi (2at + b) \frac{\sin(nt)}{n} dt \text{ mais } \sin(0) = \sin(n\pi) = 0 \\ &= - \int_0^\pi (2at + b) \frac{\sin(nt)}{n} dt \text{ on refait une IPP} \\ &= -[(2at + b) \frac{-\cos(nt)}{n^2}]_0^\pi - \int_0^\pi 2a \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \text{ or } \cos(0) = 1 \text{ et } \cos(n\pi) = (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n(2\pi a + b) - b}{n^2} - 2a \left[\frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^\pi \text{ mais } \sin(0) = \sin(n\pi) = 0 \\ &= \frac{(-1)^n(2\pi a + b) - b}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Pour avoir le résultat souhaité il faut : } \begin{cases} 2\pi a + b = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2} \text{ avec } a = \frac{1}{2\pi} \text{ et } b = -1}$$

4°) En sommant l'égalité du 3°) pour ' $k = n'$ ' variant de $k = 1$ jusqu'à n on obtient par linéarité de l'intégrale (somme finie) :

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi (at^2 + bt)(A_n(t) - \frac{1}{2}) dt = S_n$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (at^2 + bt) dt = S_n$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) dt = S_n + \frac{1}{2} \int_0^\pi (at^2 + bt) dt$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) dt = S_n + \frac{1}{2}(a\frac{\pi^3}{3} + b\frac{\pi^2}{2}) \text{ mais } a = \frac{1}{2\pi} \text{ et } b = -1$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) dt = S_n + \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}) = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{On a donc : } \forall n \geq 1, \int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

$$g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$5^\circ) \text{ On pose alors : } t \longmapsto \begin{cases} \frac{at^2+bt}{2\sin(t/2)} \text{ si } t \neq 0 \\ b \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

g est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ comme quotient de fonctions C^1 . Etudions en 0.

Au voisinage de 0 : $g(t) \sim \frac{bt}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} b = g(0)$ donc g est continue en 0.

$$\text{Sur }]0, \pi], g'(t) = \frac{(2at+b)2\sin(t/2) - \cos(t/2)(at^2+bt)}{4\sin^2(t/2)}$$

$$\text{Au voisinage de 0 : } g'(t) = \frac{2at^2+bt-at^2-bt+o(t^2)}{4\sin^2(t/2)} = \frac{at^2+o(t^2)}{4\sin^2(t/2)} \sim \frac{at^2}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} a$$

$$\begin{cases} g \text{ est continue sur } [0, \pi] \\ g \text{ est dérivable sur }]0, \pi] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t) = a \end{cases} \quad \text{on peut donc appliquer le théorème de prolongement de la fonction dérivée et}$$

on en déduit que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

$$\bullet \text{ Comme } g \text{ est } C^1 \text{ sur } [0, \pi] \text{ alors par le 1°) : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(\frac{2n+1}{2}t) dt = 0$$

$$\text{Comme on a vu que : } \int_0^\pi g(t) \sin(\frac{2n+1}{2}t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6} \text{ on en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{On a donc montrer que : } A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6°) • $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc B est absolument convergente.

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2} \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array} \right.$, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs on en déduit que C est convergente.

- En séparant les termes d'indice pair de ceux d'indice impair dans A on obtient :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ donc } A = \frac{1}{4}A + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}A = \frac{\pi^2}{8}$$

- De même, en séparant les termes d'indice pair de ceux d'indice impair dans B on obtient :

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ donc } B = \frac{1}{4}A - C = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{-\pi^2}{12}$$

- Bilan : $\boxed{B \text{ et } C \text{ sont convergentes et } B = \frac{-\pi^2}{12} \quad C = \frac{\pi^2}{8}}$