

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°3

EXERCICE 1

1) Voir cours.

2) Comme $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $\sin(u) \underset{u=0}{\sim} u$ alors $v_n \sim u_n$

De même $\ln(1+u) \underset{u=0}{\sim} u$ donne $w_n \sim u_n$ et par transitivité de l'équivalent, on a : $\boxed{u_n \sim v_n \sim w_n}$

3) • $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \end{cases}$ donc, par le théorème spécial : $\sum u_n$ est convergente.

• Par développement limité : $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = u_n + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Comme $\frac{1}{n^{3/2}} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$), alors, par domination : $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est convergente.

On a donc : $\begin{cases} v_n = u_n + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ convergente} \end{cases}$ et donc $\sum v_n$ convergente.

• Par développement limité : $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

En posant $a_n = w_n - u_n$ on a : $a_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$a_n \sim -\frac{1}{2n} < 0$, et comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par équivalent : $\sum a_n$ divergente.

On a donc : $\begin{cases} w_n = u_n + a_n \\ \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum a_n \text{ divergente} \end{cases}$ et donc $\sum w_n$ divergente.

• BILAN : $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont convergentes et } \sum w_n \text{ est divergente.}}$

EXERCICE 2

• On commence par comparer $2^{\sqrt{n}}$ et b^n . On a : $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = \exp(\ln(2)\sqrt{n} - n\ln(b))$

Cas 1 : $0 < b \leq 1$

Alors $\ln(b) \leq 0$ et $\ln(2)\sqrt{n} - n\ln(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Donc $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = \exp(\ln(2)\sqrt{n} - n\ln(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et on a $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$

Cas 2 : $b > 1$

Alors $\ln(b) > 0$ et $\ln(2)\sqrt{n} - n\ln(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ (comparaison de puissances)

Donc $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = \exp(\ln(2)\sqrt{n} - n\ln(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$

- Revenons à c_n en gardant ces deux cas.

Cas 1 : $0 < b \leq 1$

Alors $c_n \sim \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}} \sim a^n > 0$

Donc par la règle de l'équivalent on a : $\sum c_n$ et $\sum a^n$ qui sont de même nature.

Or $\sum a^n$ convergente $\Leftrightarrow 0 < a < 1$ car on reconnaît une série géométrique, donc, dans le cas $b \leq 1$:

$\sum c_n$ convergente $\Leftrightarrow 0 < a < 1$

Cas 2 : $b > 1$

Alors $c_n \sim \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n}$

$c_n \neq 0$ donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \sim \frac{a^{n+1} 2^{\sqrt{n+1}}}{b^{n+1}} \frac{b^n}{a^n 2^{\sqrt{n}}} \sim \frac{a}{b} \exp((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln(2))$

Mais $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}((1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1) = \sqrt{n}(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

On en déduit $\exp((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b}$

La règle de D'Alembert permet alors d'obtenir :

$\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Rightarrow \sum c_n$ convergente

et $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b \Rightarrow \sum c_n$ divergente

Si $a = b$ alors $c_n = 2^{\sqrt{n}}$ qui ne tend pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.

Donc dans le cas 2 : $\sum c_n$ convergente $\Leftrightarrow a < b$

$$\text{Bilan : } \sum c_n \text{ convergente} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b \leq 1 \\ a < 1 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} b > 1 \\ a < b \end{cases} \end{cases}$$

EXERCICE 3

- Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \det(A_n(x))$

$$\text{On a alors : } u_{n+2} = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+2)}$$

l'indice $(n+2)$ désignant la taille de la matrice

• On développe alors par rapport à la première ligne et on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)} - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)} \\
\Rightarrow u_{n+2} &= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)} - x^2 \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)} \\
\Rightarrow u_{n+2} - (1+x^2)u_{n+1} + x^2u_n &= 0
\end{aligned}$$

• On remarque alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène d'équation caractéristique : $R^2 - (1+x^2)R + x^2 = 0$
On résout : $\Delta = (1+x^2)^2 - 4x^2 = 1 - 2x^2 + x^4 = (1-x^2)^2$

Cas 1 : $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Deux racines distinctes : $R_1 = \frac{1+x^2+1-x^2}{2} = 1$ et $R_2 = \frac{1+x^2-1+x^2}{2} = x^2$

On sait alors, par le cours, qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha + \beta x^{2n-2}$

Mais $u_1 = 1 + x^2$ et $u_2 = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha + \beta = 1 + x^2 \\ \alpha + x^2\beta = 1 + x^2 + x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x^4}{x^2-1} \\ \alpha = \frac{-1}{x^2-1} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} = \sum_{k=0}^n x^{2k}$$

Cas 2 : $x = 1$ ou $x = -1$

On a une racine double $R = 1$ et donc, par le cours, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha + \beta(n-1)$

Mais $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$ (pour les deux valeurs de x)

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ et donc } u_n = 2 + n - 1 = n + 1$$

On remarque que si $x = 1$ ou $x = -1$, alors : $\sum_{k=0}^n x^{2k} = n + 1$

• On a donc le bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \det(A_n(x)) = \sum_{k=0}^n x^{2k}}$

EXERCICE 4

1) Soit $(M, N) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors : $\phi(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \phi(M) + \lambda \phi(N)$

ϕ est donc linéaire, comme de plus ϕ va de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ alors $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme.}}$

2) $\phi^2(M) = \phi(AM) = A(AM) = A^2M$

On montrera, par récurrence que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \phi^k(M) = A^k M}$

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } \phi(E_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3E_3, \quad \phi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3E_4 \\ \phi(E_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 4E_3, \quad \phi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_2 + 4E_4 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3) b) • On a $\det(\phi) = \det(M_B(\phi))$

$$\text{On effectue } C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \text{ et } C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2, \text{ on a donc } \det(\phi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

• $\text{tr}(\phi) = \text{tr}(M_B(\phi)) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$

On a donc : $\boxed{\text{tr}(\phi) = 10 \text{ et } \det(\phi) = 4}$

4) • Supposons A inversible.

$M \in \ker(\phi) \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AM = 0 \Leftrightarrow M = 0$ donc $\ker(\phi) = \{0\}$ et donc ϕ est injective.

Comme ϕ est un endomorphisme alors ϕ est bijective et donc ϕ inversible.

• Réciproquement, supposons ϕ inversible.

Soit $X \in \ker(A)$. On pose $M = (X \ X \dots \ X)$ et on a donc $\phi(M) = (AX \ AX \dots \ AX) = 0$, ce qui donne $M \in \ker(\phi) = \{0\}$ donc $M = 0$ et donc $X = 0$

On a alors $\ker(A) = \{0\}$ et donc A inversible.

Bilan : $\boxed{\phi \text{ inversible} \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$

5) Si A est une matrice de symétrie alors $A^2 = I_n$ et donc $\phi^2(M) = A^2M = M$ donc $\phi^2 = Id$ et donc ϕ est une symétrie.

6) Supposons que $\text{rg}(A) \geq 1$, alors A admet au moins une colonne non nulle. Soit donc $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ telle que C_i , la i -ième colonne de A soit non nulle.

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On pose $M_{i,j}$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le (i, j) ième.

Alors $\phi(M_{i,j})$ est la matrice dont les colonnes sont nulles sauf la j -ième qui vaut C_i .

La famille $(\phi(M_{i,1}), \dots, \phi(M_{i,n}))$ étant clairement libre on a $\text{rg}(\phi) \geq n$

Bilan : $\boxed{\text{rg}(A) \geq 1 \Rightarrow \text{rg}(\phi) \geq n}$

7) Comme $n = 2$, on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et comme à la question 3) on a :

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

On a $rg(\phi) = rg(M_B(\phi))$

On effectue $L_2 \longleftrightarrow L_3$ et on a : $rg(\phi) = rg\left(\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}\right)$

On effectue $C_2 \longleftrightarrow C_3$ et on a : $rg(\phi) = rg\left(\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Avec cette écriture on a : $\boxed{rg(\phi) = 2rg(A)}$

8) • Soit $\lambda \in sp(\phi)$

Alors, il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$ et $\phi(M) = \lambda M$

Comme M est non nulle, elle possède (au moins) une colonne, notée C_i , non nulle.

Alors $\phi(M) = \lambda M \Rightarrow AM = \lambda M$ et sur la colonne C_i on a : $AC_i = \lambda C_i$ avec $C_i \neq 0$ et donc $\lambda \in sp(A)$

On a donc $sp(\phi) \subset sp(A)$

• Soit $\lambda \in sp(A)$

Alors, il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

Si on pose $M = (X \ X \ \dots \ X)$ alors $\phi(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$ et donc $\lambda \in sp(\phi)$

On a donc $sp(A) \subset sp(\phi)$

• Comme on a les deux inclusions alors : $\boxed{sp(\phi) = sp(A)}$

9) a) Si A est diagonalisable alors il existe $(C_1, \dots, C_n)$ une base de vecteurs propres de A avec C_i associé à la valeur propre λ_i

Si on note $F_{i,j}$ la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j -ième qui vaut C_i

Alors $B_A = (F_{1,1}, \dots, F_{1,n}, \dots, F_{i,1}, \dots, F_{i,n}, \dots, F_{n,1}, \dots, F_{n,n})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et la matrice de ϕ relativement à cette base vaut : $diag(\lambda_1 I_n, \dots, \lambda_i I_n, \dots, \lambda_n I_n)$

On déduit : $det(\phi) = \lambda_1^n \dots \lambda_n^n = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^n = det(A)^n$

9) b) On utilise le résultat $A = \lim_{N \rightarrow +\infty} A_N$ avec les A_N diagonalisable, par continuité on a :

$$det(\phi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} det(A_N)^n = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} det(A_N) \right)^n = det(A)^n$$