

Chapitre 6 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé exercice 6.1

Montrer que $A = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4t+3} dt$ est une intégrale convergente et calculer A .

Correction

$t \mapsto \frac{2}{t^2+4t+3}$ est une fonction continue sur $[0; +\infty[$, donc A est une intégrale impropre en $+\infty$

On va chercher une écriture plus simple de la fonction à intégrer.

On écrit $\frac{2}{t^2+4t+3} = \frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a}{t+3} + \frac{b}{t+1}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a(t+1)+b(t+3)}{(t+1)(t+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = a(t+1) + b(t+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + 3b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \frac{2}{t^2+4t+3} = \frac{-1}{t+3} + \frac{1}{t+1}$$

Soit $X > 0$.

$$\int_0^X \frac{2}{t^2+4t+3} dt = \int_0^X \frac{-1}{t+3} + \frac{1}{t+1} dt = [-\ln(t+3) + \ln(1+t)]_0^X = \ln\left(\frac{1+X}{3+X}\right) + \ln(3) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \ln(3)$$

On en déduit que :
 $A \text{ est convergente et que } A = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4t+3} dt = \ln(3)$

Enoncé exercice 6.2

Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$

Correction

On va utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.

On pose $\forall x > 1$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$

f est dérivable et $f'(x) = \frac{-1}{(x\sqrt{\ln(x)})^2} [\sqrt{\ln(x)} + x \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}}] = \frac{-1}{(x\sqrt{\ln(x)})^2} [\sqrt{\ln(x)} + \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}]$

On a donc $f'(x) \leq 0$ pour $x > 1$ et donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

Par le théorème de comparaison série intégrale $\sum f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Soit $X > 2$. On a :

$$\int_2^X f(t)dt = \int_2^X \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} dt = [2\sqrt{\ln(t)}]_2^X = 2\sqrt{\ln(X)} - 2\sqrt{\ln(2)} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$$

On en déduit que $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Par le résultat obtenu par comparaison série-intégrale on a donc $\boxed{\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \text{ divergente}}$

Enoncé exercice 6.3

Déterminer la nature de $B = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2 \exp(t)} dt$

Correction

$t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2 \exp(t)}$ est continue sur $[0; +\infty[$, B pose donc problème en $+\infty$

On a : $\frac{t^2}{1+t^2 \exp(t)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} > 0$

Or, on sait d'après le cours que $t \mapsto e^{-t} dt$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc, par la règle de l'équivalent on a que $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2 \exp(t)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et donc, par absolue convergence :

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2 \exp(t)} dt \text{ est convergente}$$

Enoncé exercice 6.4

Déterminer la nature de $C = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2} dt$

Correction

$t \mapsto \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$, C est donc impropre en $+\infty$

On a : $\left| \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et donc $\left| \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2} \right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or, on sait d'après le cours (Riemann) que $t \mapsto \frac{1}{t^2} dt$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, par comparaison on a que $t \mapsto \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit donc, par absolue convergence que :

$$C = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t(t+3t^2)}{t^2} dt \text{ est convergente}$$

Enoncé exercice 6.5

Déterminer la nature de $D = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$

Correction

$t \mapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[0; +\infty[$, D est donc impropre en $+\infty$

$t \mapsto t^2$ est une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Effectuons dans $\tilde{D} = \int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ le changement de variable C^1 bijectif $u = t^2$, alors $t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

On en déduit $\tilde{D}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$

Soit $X > 1$.

On effectue une intégration par partie avec les fonctions C^1 sur $[1; +\infty[$: $\begin{cases} f' = \cos(u) \\ g = \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{cases}$ et $\begin{cases} f = \sin(u) \\ g' = \frac{-1}{4u^{3/2}} \end{cases}$.

On obtient : $\tilde{D} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \right]_1^X + \frac{1}{4} \int_1^X \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du = \frac{\sin(X)}{2\sqrt{X}} - \frac{\sin(1)}{2} + \frac{1}{4} \int_1^X \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$

Comme $\sin$ est bornée, on a : $\frac{\sin(X)}{2\sqrt{X}} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\tilde{D}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$

Mais $\forall u \geq 1$, $\left| \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable (Riemann) sur $[1, +\infty[$, donc comparaison on

a : $t \mapsto \frac{\cos(u)}{u^{3/2}}$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par absolue convergence $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$ est convergente.

On en déduit $\tilde{D}$ convergente et donc $D = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ convergente.

Enoncé exercice 6.6

Montrer que $G = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ est convergente.

Correction

$t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. G ne pose donc problème qu'en $+\infty$

On a au voisinage de $+\infty$, par comparaison exponentielle-puissance : $\exp(-t^2) = o(\frac{1}{t^2})$

puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-t^2)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \exp(-t^2) = 0$

Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, donc par négligeabilité $t \mapsto \exp(-t^2)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Comme il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$, $t \mapsto \exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par absolue

convergence $G = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ est convergente.

Enoncé exercice 6.7

Montrer que $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Correction

On pose : $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ ainsi on doit étudier $D = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$

φ est continue sur $]0, +\infty[$, D pose donc problème aux bornes 0 et $+\infty$.

• En 0

Au voisinage de $t = 0^+$: $\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$ donc φ est prolongeable par continuité en $t = 0$.

$D_1 = \int_0^1 \varphi(t) dt$ est donc convergente, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

• En $+\infty$

Soit $A > 1$. Alors, par intégration par partie :

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^A \underbrace{\sin(t)}_{u'} \underbrace{\frac{1}{t}}_v dt = \left[\underbrace{-\cos(t)}_u \underbrace{\frac{1}{t}}_v \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{-\cos(t)}_u \underbrace{\frac{-1}{t^2}}_{v'} dt = \frac{-\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Pour $t \geq A$, on a : $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$. De plus, par Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

Avec l'égalité obtenue par intégration par partie on obtient, puisque $\frac{-\cos(A)}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ ($\cos$ bornée) :

$$\int_1^A \varphi(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \in \mathbb{R}$$

$D_2 = \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ est donc convergente.

• Comme $D = D_1 + D_2$ et que D_1 et D_2 sont convergentes alors : $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.