

Chapitre 7 : Espaces préhilbertiens réels ; Espaces euclidiens

Chapitre de révisions qui fait partie du programme de première et de deuxième année. Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension quelconque (y compris infinie et sauf mention contraire).

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

Définitions. On dit qu'une application $\langle, \rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

1. $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$ alors on dit que $(E, \langle, \rangle)$ est un *espace préhilbertien réel*.

Si de plus E est de dimension finie alors on dit que $(E, \langle, \rangle)$ est un *espace euclidien*.

Remarques. On dit que $\langle, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. (1 pour linéaire 2 pour symétrique, 1 et 2 pour bilinéaire symétrique, 4 pour définie, 3 pour positive)

Sur un espace vectoriel il peut exister plusieurs produits scalaires.

On note parfois $x.y$ ou (x, y) ou $(x|y)$ le produit scalaire ...

1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On note $E = \mathbb{R}^n$ identifié à $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose : $\forall (X, Y) \in E^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y$

Alors : $\langle, \rangle$ définie sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.3 Produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$

On note $E = M_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall (A, B) \in E^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

Alors : $\langle, \rangle$ définit sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.4 Un produit scalaire sur $C^0([a, b])$

Soit $E = C^0([a, b])$. On pose : $\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$

Alors $\langle, \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Remarque. Par restriction on peut en déduire un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

preuve :

2 Norme euclidienne

2.1 Définition

Si $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E alors on pose : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
On dit que $\|\cdot\|$ est la **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle, \rangle$.

Remarques. On gardera ces notations pour la suite du chapitre.

Même dans un espace préhilbertien on parle de norme euclidienne.

Attention il y a des normes qui ne sont pas euclidiennes, on précisera tout cela dans un prochain chapitre.

On garde ces notations pour la suite.

2.2 Première propriétés

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \|x\| \geq 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ \forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$$

preuve :

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2.3.1 Théorème

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2.3.2 preuve

2.3.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow (x, y) \text{ est liée}$

2.4 Inégalité Triangulaire

2.4.1 Théorème

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2.4.2 preuve

2.4.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (x, y) \text{ est positivement liée}$

2.5 Quelques identités

2.5.1 Identité du parallélogramme

Lemme. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Interprétation

preuve :

2.5.2 Identités de polarisation

Théorème . Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors : $\forall (x, y) \in E^2$

$$i) \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$iii) \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

preuve :

3 Orthogonalité

3.1 Vocabulaire

Définitions. Soit x et y deux vecteurs de E . Alors on dit que :

x est *unitaire* si et seulement si $\|x\| = 1$

x et y sont *orthogonaux* si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$ On note ceci $x \perp y$

3.2 Famille orthogonale

3.2.1 Définitions

Définitions. Soit $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de E . Alors on dit que :

S est *orthogonale* si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$

S est *orthonormale* (ou *orthonormée*) si et seulement si S est une famille orthogonale de vecteurs unitaires

3.2.2 Théorème

Théorème . Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est *libre*.

Corollaire. Une famille orthonormale est *libre*.

preuve :

3.3 Théorème de Pythagore

3.3.1 Théorème de Pythagore

Théorème . Soit x et y deux vecteurs de E . Alors : $x \perp y \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

preuve :

3.3.2 Avec plus de vecteurs

Lemme. Soit $n \geq 3$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de E . Alors :

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

Remarques. Attention il n'y a pas de réciproque avec n vecteurs.

Contre-exemple : $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 2)$ et $x_3 = (0, -1)$

3.4 Orthogonal d'une partie ou d'un sous espace vectoriel

3.4.1 Définition

Définition. Soit X une partie de E alors on pose : $X^\perp = \{x \in E, \forall y \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$

Remarques. Cette définition s'applique en particulier à un sous espace vectoriel de E .

On a en fait $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$

3.4.2 Propriétés

Propriété. $X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E .

Propriétés. Si F est un sous espace vectoriel de E alors :

i) $\{0_E\}^\perp = E$ ii) $E^\perp = \{0_E\}$ iii) $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ iv) $F \subset (F^\perp)^\perp$

Remarque. Le point iii) est faux si F n'est pas un s.e.v.

preuves :

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

4.1 Théorème

Théorème . Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de E alors il existe une famille *orthonormale* de vecteurs non nuls $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E telle que : $\forall k \in \llbracket 1..n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

Remarques. On a le même théorème avec "orthogonale"

En particulier : $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

4.2 preuve

4.3 Algorithme de Schmidt

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ se construit par itérations en posant :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ \forall k \geq 2, & u_k = \frac{e_k - \sum_{p=1}^{k-1} \langle e_k, u_p \rangle u_p}{\left\| e_k - \sum_{p=1}^{k-1} \langle e_k, u_p \rangle u_p \right\|} \end{cases}$$

Remarques. $\sum_{p=1}^{k-1} \langle e_k, u_p \rangle u_p$ est le projeté orthogonale de e_k sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$ (cf 5.)

On dit que l'on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

4.4 Application aux espaces euclidiens

Théorème . Tout espace *euclidien* admet une base orthonormée.

Remarque. De la même manière, tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien admet une base orthonormale.

Théorème . (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille orthonormale de vecteurs non nuls alors il existe $(e_{k+1}, \dots, e_{\dim(E)}) \in E^{\dim(E)-k}$ telle que $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{\dim(E)})$ soit une base orthonormale de E .

4.5 Calculs dans une base orthonormée d'un espace euclidien

Théorème . Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors :

Tout vecteur x de E peut s'écrire dans B sous la forme : $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Les coordonnées de x dans B sont donc $\text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Soit $(x, y) \in E^2$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans B et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de y dans B .

Alors : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{X^T X}$

Remarque. On retrouve, à un changement de base près, le produit scalaire canonique.

preuve :

5 Théorème de projection orthogonale

5.1 Théorème

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors :

i) $E = F \oplus F^\perp$

ii) On peut définir p_F le projecteur orthogonal sur F par :

$$\forall x \in E \text{ alors } p_F(x) = y \text{ où } y \text{ est l'unique vecteur tel que } \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

iii) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F alors : $\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$

iv) Pour tout x de E le vecteur projeté $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F , c'est-à-dire que :
 $d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$

De plus $p_F(x)$ est le seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$

Remarques. p_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Si $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une base quelconque (pas forcément orthonormée) de E alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^n x'_k e'_k$ avec $(x'_1, \dots, x'_n)$

solution du système : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle x - p_F(x), e'_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x'_k \langle e'_k, e'_i \rangle = \langle x, e'_i \rangle$

preuve :

5.2 Supplémentaire orthogonale

5.2.1 Définition

Définition. Soit F et G deux sous espaces vectoriels de $(E, \langle, \rangle)$.

Alors, on dit que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall (f, g) \in F \times G, \langle f, g \rangle = 0$

On note ceci $F \perp G$.

5.2.2 Supplémentaire orthogonaux

Si F et G sont orthogonaux alors $F + G = F \oplus G$, si de plus $F \oplus G = E$ alors on dit que :

F et G sont supplémentaires orthogonaux.

On note ceci $F + G = F \oplus^\perp G$.

5.2.3 Cas particulier

Lemme. Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus^\perp F^\perp$

Remarque. C'est un corollaire du théorème de projection orthogonale.

Corollaire. Si F est un sous espace vectoriel d'un espace euclidien E alors :

$\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$ et $E = F \oplus^\perp F^\perp$

5.2.4 Cas général

Si F n'est pas de dimension finie, on a seulement $F \oplus F^\perp \subset E$ et il n'y a pas forcément égalité.

Exemple. Dans $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire vu en 1.4. $(\mathbb{R}[X])^\perp = \{0_E\} \dots$

5.3 Hyperplan

5.3.1 Représentation d'une forme linéaire

Théorème . Soit ϕ une forme linéaire d'un espace euclidien $(E, \langle, \rangle)$. Alors :
il existe un unique $u \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle u, x \rangle$

preuve :

5.3.2 Caractérisation des hyperplans d'un espace euclidien

Lemme. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Alors :
tout hyperplan H de E s'écrit sous la forme $H = \{u\}^\perp$ avec $u \in E \setminus \{0_E\}$

preuve :

5.3.3 Vecteur normal à un hyperplan

Lemme. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et H un hyperplan de E .
Alors :
si $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est une équation cartésienne de H dans B , le vecteur a de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans B est un vecteur normal à H .

preuve :

5.3.4 Distance à un hyperplan

Théorème . Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien, et u un vecteur non nul de E .
On note H l'hyperplan : $H = \{u\}^\perp$

Alors : $\forall x \in E, \begin{cases} \text{le projeté orthogonal de } x \text{ sur } \text{Vect}(u) \text{ est } \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \\ \text{le projeté orthogonal de } x \text{ sur } H \text{ est } x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \\ d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|} \end{cases}$

preuve :

5.3.5 Applications : distance à une droite dans $\mathbb{R}^2$ et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$

Sommaire

1	Produit scalaire	1
1.1	Produit scalaire	1
1.2	Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	1
1.3	Produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$	1
1.4	Un produit scalaire sur $C^0([a, b])$	1
2	Norme euclidienne	2
2.1	Définition	2
2.2	Première propriétés	2
2.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz	2
2.3.1	Théorème	2
2.3.2	preuve	2
2.3.3	Cas d'égalité	2
2.4	Inégalité Triangulaire	2
2.4.1	Théorème	2
2.4.2	preuve	2
2.4.3	Cas d'égalité	2
2.5	Quelques identités	2
2.5.1	Identité du parallélogramme	2
2.5.2	Identités de polarisation	2
3	Orthogonalité	3
3.1	Vocabulaire	3
3.2	Famille orthogonale	3
3.2.1	Définitions	3
3.2.2	Théorème	3
3.3	Théorème de Pythagore	3
3.3.1	Théorème de Pythagore	3
3.3.2	Avec plus de vecteurs	3
3.4	Orthogonal d'une partie ou d'un sous espace vectoriel	3
3.4.1	Définition	3
3.4.2	Propriétés	3
4	Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	4
4.1	Théorème	4
4.2	preuve	4
4.3	Algorithme de Schmidt	4
4.4	Application aux espaces euclidiens	4
4.5	Calculs dans une base orthonormée d'un espace euclidien	4
5	Théorème de projection orthogonale	5
5.1	Théorème	5
5.2	Supplémentaire orthogonale	5
5.2.1	Définition	5
5.2.2	Supplémentaire orthogonaux	5
5.2.3	Cas particulier	5
5.2.4	Cas général	5
5.3	Hyperplan	6
5.3.1	Représentation d'une forme linéaire	6
5.3.2	Caractérisation des hyperplans d'un espace euclidien	6
5.3.3	Vecteur normal à un hyperplan	6
5.3.4	Distance à un hyperplan	6
5.3.5	Applications : distance à une droite dans $\mathbb{R}^2$ et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$	6