

Mathématiques : Correction du "TD libre" Toussaint

Exercice 2 : calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1°) a) Comme $t \in]0; 2\pi[$ alors $e^{it} \neq 1$ et on peut utiliser la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir : $\sum_{k=1}^n e^{ikt} = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = \frac{e^{it}(1-(e^{it})^n)}{1-e^{it}}$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) \\ \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}(1-(e^{it})^n)}{1-e^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1-e^{nit}}{1-e^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{e^{nit/2}(e^{-nit/2}-e^{nit/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it(1+n/2-1/2)} \frac{e^{-nit/2}-e^{nit/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{\frac{n+1}{2}it} \frac{-2i\sin(\frac{nt}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{\cos(\frac{n+1}{2}t)\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t) - \sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{S_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} \text{ pour } t \in]0, 2\pi[}$$

1°) b) L'intégrale A peut à priori poser problème en 0, mais la relation du a) permet de voir que :

$A = \int_0^\pi S_n(t) dt$ est clairement une intégrale convergente puisque S_n est continue sur $[0; \pi]$ comme somme de fonctions continues.

On a alors : $A = \int_0^\pi [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)] dt = [\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ puisque $\sin(kt) = \sin(0) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{A \text{ existe donc et vaut } A = \frac{\pi}{2}}$$

2°) a) $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$ sur $]0; \pi]$ et donc f est de classe C^0 sur $]0; \pi]$ comme quotient de fonctions C^0 (avec le dénominateur qui ne s'annule pas).

Pour $t \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$f(t) = \frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t} = \frac{t-2\sin(t/2)}{2\sin(t/2)t} = \frac{t-2(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^3))}{2t(\frac{t}{2}+o(t))} = \frac{\frac{t^3}{24}+o(t^3)}{t^2+o(t^2)} \sim \frac{\frac{t^3}{24}}{t^2} \sim \frac{t}{24} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0. Comme f est aussi continue sur $]0; \pi]$ alors $\boxed{f \text{ est de classe } C^0 \text{ sur } [0, \pi]}$

2°) b) $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$ sur $]0; \pi]$ et donc f est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ comme quotient de fonctions C^1 (avec le dénominateur qui ne s'annule pas).

$$\text{On a alors } \forall t \in]0; \pi], f'(t) = \frac{1 - \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} + \frac{1}{t^2} = \frac{4\sin^2(\frac{t}{2}) - t^2\cos(\frac{t}{2})}{4t^2\sin^2(\frac{t}{2})}$$

2°) c) Avec le a) il reste juste à voir que f est C^1 en 0.

Pour t au voisinage de 0, compte tenu de l'expression du a) :

$$f'(t) = \frac{4(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{8 \times 6}+o(t^3))^2 - t^2(1-\frac{1}{22 \times 2}t^2+o(t^2))}{4t^2(\frac{t}{2}+o(t))^2} = \frac{4(\frac{t^2}{4}-\frac{t^4}{48}+o(t^4)) - t^2+\frac{1}{8}t^4+o(t^4)}{4t^2(\frac{t^2}{4}+o(t^2))} = \frac{t^2-\frac{t^4}{12}-t^2+\frac{1}{8}t^4+o(t^4)}{t^4+o(t^4)} = \frac{\frac{1}{24}t^4+o(t^4)}{t^4+o(t^4)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{24}$$

On a donc $\begin{cases} f \text{ continue sur } [0, \pi] \\ f \text{ dérivable sur }]0, \pi[\\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = \frac{1}{24} \end{cases}$ donc, par le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{24}$. On a aussi f' continue en 0, et on peut donc affirmer que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$

2°) d) f' est continue sur l'intervalle fermé bornée $[0, \pi]$ donc par le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[0, \pi]$.

Donc $\boxed{\text{il existe un réel } M \text{ tel que : } \forall t \in [0; \pi] \quad |f'(t)| \leq M}$

3°) a) Comme f est C^1 on peut intégrer par partie avec $\begin{cases} u = f \\ v' = \sin((n + \frac{1}{2})t) \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = f' \\ v = \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos((n + \frac{1}{2})t) = \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \text{Alors } \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \\ &= [f(t) \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t)]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t) \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t) dt = 0 + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt \end{aligned}$$

Le terme en crochet est nul puisque $f(0) = 0$ et $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$

$$\text{On a donc } \boxed{\int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt}$$

3°) b) $|f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t)| \leq |f'(t)| \leq M$ avec le 2°) d).

L'inégalité de la moyenne et l'égalité du 3°) a) donne directement : $\boxed{\left| \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{2\pi M}{2n+1}}$

3°) c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi M}{2n+1} = 0$, par encadrement, avec le 3°) b) on obtient : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0}$

4°) Voir cours

$$\begin{aligned} & 5°) \text{ a) } \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt \text{ On effectue le changement de variable } u = (n + \frac{1}{2})t \text{ (donc } dt = \frac{du}{n + \frac{1}{2}}) \\ &= \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(u)}{\frac{t}{n + \frac{1}{2}}} \frac{du}{n + \frac{1}{2}} = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(u)}{u} du \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \frac{1}{2})\pi = +\infty$ alors : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt}$

$$\begin{aligned} & 5°) \text{ b) } \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt \\ &= \int_0^\pi \sin((n + \frac{1}{2})t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} + \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \right] dt \\ &= \underbrace{- \int_0^\pi \sin((n + \frac{1}{2})t) f(t) dt}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} dt}_{A = \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

D'après 3°) c) et 1°) b)

Avec le 5°) a) On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 : e3A PC 2024, exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{cases} x^2 \leq x \text{ si } x \in [0, 1] \\ x \leq x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin t^\alpha}{t}$.

2.1. La fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sa dérivée sur $[1, +\infty[$ est $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1} \cos(t^\alpha)$.

2.2. φ est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $t \geq 1$, on a $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} \sin(t^\alpha) + \alpha \frac{\cos(t^\alpha)}{t^{2-\alpha}}$.

2.3. Par inégalité triangulaire, pour tout $t \geq 1$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t^{2-\alpha}}$.

2.4. Soit $n \geq 1$ et soit $t \in [n, n+1]$. On applique le théorème des accroissements finis entre t et n : Il existe $t_0 \in [n, n+1]$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(n)| = |\varphi'(t_0)| \times |t - n|$. Or, d'après la question précédente, on a $|\varphi'(t_0)| \leq \frac{1 + \alpha t_0^\alpha}{t_0^2} = \frac{1}{t_0^2} + \frac{\alpha}{t_0^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ car $2 - \alpha > 0$.

3. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

$$\text{On a pour tout } n : u_n - a_n = \int_n^{n+1} [\varphi(t) - \varphi(n)] dt$$

et donc, par inégalité triangulaire et d'après la question précédente :

$$|u_n - a_n| \leq \int_n^{n+1} (t - n) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) dt \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

4. 4.1. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$.

4.2. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $X \in [1, +\infty[$. Le crochet $\left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^X$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ ont même nature. Comme l'intégrale $\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable.

On peut aussi écrire : Soit $X \in [1, +\infty[$.

$$\text{Par une intégration par parties, } \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Le crochet possède une limite finie lorsque X tend vers l'infini. Il en résulte que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

5. En effectuant le changement de variable $u = t^\alpha$ (qui est C^1 et strictement croissant car $\alpha > 0$) les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ et $\frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ ont même nature. On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge.
6. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge puisque sa somme partielle $\sum_{k=1}^n u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t) dt$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.
7. D'après la question 3., la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - a_n)$ converge absolument car $2 - \alpha > 1$.
8. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum (u_n - a_n)$ convergent, la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge en tant que différence de deux séries convergentes.
9. On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est convergente.
- 9.1. Puisque l'on a : $0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq \frac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$ et d'après ce que l'on a supposé, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente par le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- 9.2. Soit $X \in [1, +\infty[$, par une intégration par parties, on a
- $$\int_1^X \frac{\cos(2x)}{x} dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2x} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2x)}{2x^2} dx$$
- Comme le crochet admet une limite finie, on en déduit que les deux intégrales sont de même nature. Or $\frac{\sin(2x)}{2x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est convergente.
- 9.3. En utilisant alors la formule : $\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n^\alpha)}{2n}$ on obtient que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ n'est pas absolument convergente

Exercice 3 : e3A PSI 2019

1.) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Supposons que (u_n) soit majorée. Alors (u_n) croissante majorée donne $u_n \rightarrow \lambda$.

Si on passe à la limite dans l'équation définissant (u_n) alors : $\lambda = \lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Absurde car $u_0 = a > 0$ donc $\lambda \geq a > 0$. Donc (u_n) n'est pas majorée et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$\begin{aligned} 2.a) \quad & v_{n+p+1} - v_{n+p} \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}} \ln(u_{n+p}) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} [\ln(u_{n+p+1}) - 2\ln(u_{n+p})] \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} [\ln(u_{n+p+1}) - \ln(u_{n+p}^2)] \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \quad (> 0 \text{ car } u_{n+p} > 0) \end{aligned}$$

et comme (u_n) croissante donne $(\frac{1}{u_n})$ décroissante, alors $1 + \frac{1}{u_{n+p}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$ en passant au $\ln$ et en reportant

ci-dessus on a : $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$

2.b) On somme la relation de 2.a) pour p variant de 0 à k . Alors, par télescopage :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \quad \text{On utilise la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} :$$

$$\begin{aligned} 0 < v_{n+k+1} - v_n &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \Rightarrow 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\ &\Rightarrow 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

On a donc : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$

2.c) En prenant $n = 0$ dans 2.a) on a : $0 < v_{p+1} - v_p$ et donc (v_n) est croissante.

Dans 2.b) en supposant que k varie et que n est fixé, on en déduit que (v_n) est bornée.

Donc (v_n) croissante majorée donc (v_n) convergente vers une limite L .

3.) $\frac{t_n}{u_n} = \frac{e^{2^n L}}{e^{2^n v_n}} = \exp(2^n(L - v_n))$ Mais en faisant tendre $k \rightarrow +\infty$ dans 2.b) on obtient :
 $0 < L - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ donc $0 < 2^n(L - v_n) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$

Donc , par croissante de $\exp$: $1 \leq \frac{t_n}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$

Et comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $\frac{t_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $u_n \sim t_n$

4.a) $s_{n+1} = t_{n+1} - u_{n+1} = e^{2^{n+1}L} - u_{n+1}^2 - u_{n+1} = t_n^2 - u_n - u_n^2 = (s_n + u_n)^2 - u_n - u_n^2$
 et donc $s_{n+1} = s_n^2 + u_n(2s_n - 1)$

4.b) On a vu en 3.) que $\frac{t_n}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{t_n - u_n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{s_n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} \Rightarrow s_n \leq 1$
 Comme $s_n > 0$ alors (s_n) est bornée.

4.c) Avec la relation de 4.a) on a : $2s_n - 1 = \frac{s_{n+1} - s_n^2}{u_n}$
 Comme (s_n) bornée et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $2s_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $s_n = t_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

On a enfin : $u_n = t_n - \frac{1}{2} + o(1)$