

Feuille TD "libre" (Toussaint)

Exercice 1. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$

1°) a) Pour $t \in]0; 2\pi[$, calculer : $\sum_{k=1}^n e^{ikt}$

1°) b) Montrer que : $S_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$ pour $t \neq 0$ et $S_n(0) = n + \frac{1}{2}$

1°) c) Calculer la valeur de $A = \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} dt$

On définit la fonction f sur $[0; \pi]$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

2°) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et calculer $f'(t)$ sur cet intervalle.

2°) b) Montrer que f est continue en 0.

2°) c) Montrer que f est dérivable en 0.

2°) d) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

2°) e) Montrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [0; \pi] \quad |f'(t)| \leq M$

3°) a) Montrer que :

$$\int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt$$

3°) b) Montrer que :

$$\left| \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{2\pi M}{2n+1}$$

3°) c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0$$

4°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

5°) a) Montrer, en le justifiant avec soin que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt$

5°) b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Exercice 2 : e3A PC 2024, exercice 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2 .

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

1. On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

- (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
- (b) Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ' .
- (c) Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$.
- (d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|.$$

2. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1, |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

3. **Convergence de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

- (a) Démontrer que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

4. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge.

5. En déduire que la série de terme général u_n converge.

6. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

7. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

8. *On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est convergente.*

(a) Montrer qu'alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

(b) Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ converge.

On procédera comme à la question 3b

(c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

e3a PSI 2019

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n) .

2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

(a) Prouver que l'on a: $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$

(b) En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

(c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = e^{2^n L}$. Démontrer que l'on a: $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

(a) Trouver une relation entre s_{n+1} , s_n et u_n .

(b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.

(c) Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a: $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} t_n + b + o(1)$