Chapitre 8 : Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre E désigne un K espace vectoriel de dimension quelconque avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Norme

1.1 Définition

Définition. *On dit qu'une application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$,$\forall \lambda \in K$:*

1. $N(x) \geq 0$ *(positivité)*
2. $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ *(homogénéité)*
3. $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ *(séparation)*
4. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni d'une norme N alors on dit que (E, N) est un espace vectoriel normé.

Remarques. *Si $N(x) = 1$ alors on dit que x est unitaire. Autre notation : $N(x) = ||x||$*

1.2 Premières propriétés

Propriétés. *Soit (E, N) un K espace vectoriel normée. Alors*

1. $N(0_E) = 0$
2. $\forall x \in E$, $N(-x) = N(x)$
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ *(deuxième inégalité triangulaire)*

preuve :

1.3 Cas particulier : norme euclidienne

Lemme. *Si $(E, <, >)$ est un espace préhilbertien alors la **norme euclidienne** ($||x|| = \sqrt{< x, x >}$) est une **norme**.*

Remarque. *Toutes les normes ne sont pas euclidienne.*

preuve :

2 Normes usuelles sur K^n

2.1 Norme 1

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $N_1(x) = ||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$*

Alors : N_1 est une norme sur K^n appelée "norme 1".

Remarques. *Dans le cas particulier $K = \mathbb{R}$ et $n = 1$, on retrouve la valeur absolue qui est donc une norme sur $\mathbb{R}$.*
Dans le cas particulier $K = \mathbb{C}$ et $n = 1$, on retrouve le module qui est donc une norme sur $\mathbb{C}$.
Même si $K = \mathbb{R}$, cette norme n'est pas euclidienne pour $n \geq 2$. (preuve en exo)

preuve :

2.2 Norme 2

Définition. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On pose :* $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $N_2(x) = ||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

Alors N_2 *est une norme sur* K^n *appelée "norme 2".*

Remarque. *Si* $K = \mathbb{R}$*, c'est la norme associée au produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$*, c'est donc une norme euclidienne.*

preuve :

2.3 Norme infinie

Définition. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On pose :* $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $N_\infty(x) = ||x||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Alors N_∞ *est une norme sur* K^n *appelée "norme infinie".*

preuve :

Remarques. *Dans le cas particulier* $K = \mathbb{R}$ *et* $n = 1$*, on retrouve la valeur absolue qui est donc une norme sur* $\mathbb{R}$*.*
Dans le cas particulier $K = \mathbb{C}$ *et* $n = 1$*, on retrouve le module qui est donc une norme sur* $\mathbb{C}$*.*
Pour $n \geq 2$*, ce n'est pas une norme euclidienne.*

2.4 Extension

Si E est un K espace vectoriel de dimension finie n, et si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors on peut poser :
$N_{1,B}(x) = N_1((x_1, \ldots, x_n))$, $N_{2,B}(x) = N_2((x_1, \ldots, x_n))$ et $N_{\infty,B}(x) = N_\infty((x_1, \ldots, x_n))$
et on définie ainsi trois normes sur E.

3 Autres normes usuelles

3.1 Sur $M_n(K)$

En identifiant $M_n(K)$ avec K^{n^2}, on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent et obtenir les normes suivantes : pour $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$: $\begin{cases} N_1(A) = ||A||_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ N_2(A) = ||A||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \\ N_\infty(A) = ||A||_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \end{cases}$

Remarques. *Si* $K = \mathbb{R}$ *alors* $N_2(A) = \sqrt{tr(A^T A)}$ *qui est une norme euclidienne.*
Si $K = \mathbb{C}$ *on peut remarquer que :* $N_2(A) = \sqrt{tr(A^T \overline{A})}$

3.2 Sur $B(I, K)$

3.2.1 Notations

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. En particulier on peut prendre I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition. *Alors on dit qu'une fonction* f *définie sur* I*, à valeurs dans* K *est bornée sur* I
si et seulement si $\exists M > 0$, $\forall x \in I$ $|f(x)| \leq M$

On notera $B(I, K)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans K bornées sur I.

Lemme. $B(I, K)$ *est un* K *espace vectoriel.*

preuve :

3.2.2 Norme

Définition. *On pose, pour tout* $f \in B(I,K)$ *:* $N_\infty(f) = ||f||_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.
Alors N_∞ *est une norme sur* $B(I,K)$ *appelée "norme infinie".*

preuve :

Remarques. *Si* $E = C^0([a;b],\mathbb{R})$ *avec* $[a;b]$ *un segment non vide de* $\mathbb{R}$*, alors* E *est un sous espace vectoriel de* $B([a;b],\mathbb{R})$ *et on peut, par restriction, définir une norme infinie sur* E.

3.3 Autre exemple

Exercice. *Soit* $I = [a,b]$ *un segment de longueur non nulle de* $\mathbb{R}$.
On pose $E = C^0(I,K)$ *et* $\forall f \in E\ N(f) = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt$
Montrer que N *est une norme sur* E.

4 Distance associée à une norme

Dans ce paragraphe $(E, ||.||)$ est un K espace vectoriel normé.

4.1 Définition

Définition. *On pose :* $\begin{array}{cccc} d & : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & ||x-y|| \end{array}$ *Alors : d est appelée distance associée à* $||.||$

Remarque. *Si la norme est euclidienne alors on dit que la distance est euclidienne.*

4.2 Propriétés

Propriétés. *On a pour tout* $x,y,z \in E$ *:* $\begin{cases} i) & d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ ii) & d(x+z,y+z) = d(x,y) \\ iii) & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$

preuve et interprétation :

4.3 Boules

4.3.1 Définitions

Définitions. *Soit* $a \in E$ *et* $r > 0$. *Alors on pose :* $\begin{cases} \mathring{B}(a,r) = \{x \in E\ ,\ ||x-a|| < r\} \\ \overline{B}(a,r) = \{x \in E\ ,\ ||x-a|| \leq r\} \\ S(a,r) = \{x \in E\ ,\ ||x-a|| = r\} \end{cases}$
$\mathring{B}(a,r)$ *est appelée boule ouverte de centre* a *et de rayon* r.
$\overline{B}(a,r)$ *est appelée boule fermée de centre* a *et de rayon* r.
$S(a,r)$ *est appelée sphère de centre* a *et de rayon* r.

Remarques. *Si* $r = 1$ *on parle de boule unité ou de sphère unité.*
$\overline{B}(a,r)$ *s'obtient par translation et homothétie de* $\overline{B}(0_E,1)$.
Les boules ont donc toutes la même forme.
Dans $\mathbb{R}$ *les boules associées à la valeur absolue sont des intervalles.*

4.3.2 Boules unités associées aux normes usuelles de $\mathbb{R}^2$

DESSINS des boules unités associés aux normes 1, 2 et ∞

5 Comparaisons de normes

Dans cette partie E désigne un K espace vectoriel.

5.1 Normes équivalentes

Définition. *Soit N_1 et N_2 deux normes sur E.*
Alors on dit que : N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E
si et seulement si $\exists\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que : $\forall x \in E$, $\alpha N_1 x \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

Remarque. $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x)$ *donc on peut échanger le rôle de N_1 et N_2.*

5.1.1 Propriétés

Proposition. *Si N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E alors :*
i) N_1 est équivalente à N_1 (réfléxivité)
ii) N_1 est équivalente à $N_2 \Rightarrow N_2$ est équivalente à N_1 (symétrie)
iii) N_1 est équivalente à N_2 et N_2 est équivalente à $N_3 \Rightarrow N_1$ est équivalente à N_3 (transivité)

Remarque. *On parle de relation d'équivalence ...*

preuve :

5.2 En dimension finie

5.2.1 Equivalence de norme

Théorème . *Dans un K espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

preuve : H-P

5.3 Exemples

5.3.1 Dans K^n

Lemme. *Dans K^n les normes : $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes et $\forall x \in K^n$:* $\begin{cases} ||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n\,||x||_\infty \\ ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty \end{cases}$

preuve :

5.3.2 Normes non équivalentes

Exercice. *Soit $E = C^0([0,1])$, on pose $\forall f \in E$, $N(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N'(f) = \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx$*

Calculons $N(f_n)$ et $N'(f_n)$ avec $f_n : x \mapsto x^n$

Sommaire

preuve du 2.1 : la norme 1 est une norme

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ et $\lambda \in K$

• Clairement : $N_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \geq 0$

• $N_1(\lambda x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda|\,|x_k| = |\lambda| \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\, N_1(x)$

• $N_1(x) = 0$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = 0$ somme de termes positifs qui est nulle
$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ |x_k| = 0$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ x_k = 0$
$\Rightarrow x = 0_{K^n}$

• Par inégalité triangulaire dans K : $\forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$
En sommant, pour k variant de 1 à n on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|$ et donc $N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y)$

• On a donc : $\forall (x,y) \in (K^n)^2\ ,\ \forall \lambda \in K\ ,\ \begin{cases} N_1(x) \geq 0 \\ N_1(\lambda x) = |\lambda|\, N_1(x) \\ N_1(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{K^n} \\ N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \end{cases}$

et donc $\boxed{N_1 \text{ est une norme sur } K^n.}$

---

preuve du 2.2 : la norme deux est une norme

• On peut commencer par remarquer que si $K = \mathbb{R}$, alors la norme deux est celle associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

• On va donc montrer que : $\begin{array}{cccc} N_2 & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^2|} \end{array}$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

i) Clairement $N_2(x) \geq 0$ comme somme de termes positifs.

ii) $N_2(\lambda x) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda|^2 |x_k|^2} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda|\, N_2(x)$

iii) $N_2(x) = 0$
$\Rightarrow \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} = 0$ on a une somme de termes positifs qui est nulle
$\Rightarrow \forall k \in [1, n]\ ,\ |x_k|^2 = 0$
$\Rightarrow \forall k \in [1, n]\ ,\ |x_k| = 0$
$\Rightarrow \forall k \in [1, n]\ ,\ x_k = 0$
$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{C}^n}$

iv) Posons $X = (|x_1|, \dots, |x_n|)$et $Y = (|y_1|, \dots, |y_n|)$. On a alors deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et on peut appliquer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$ pour obtenir, en notant, $||.||$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$:
$||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$

Alors $N_2(x+y) = N_2((x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|}$

Mais par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$: $|x_k+y_k| \leq |x_k| + |y_k|$

Donc,en élevant au carré, en sommant ces inégalités et en prenant la racine : $N_2(x+y) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| + |y_k|\right)^2}$

Mais $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| + |y_k|\right)^2} = ||X+Y||$ et $||X|| = N_2(x)$ et $||Y|| = N_2(y)$

Donc, en utilisant $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ on a finalement : $N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y)$

On a donc : $\forall (x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} N_2(x) \geq 0 \\ N_2(\lambda x) = |\lambda| \, N_2(x) \\ N_2(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{C}^n} \\ N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \end{cases}$

et donc $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } \mathbb{C}^n.}$

---

preuve du 2.3 : la norme infinie est une norme

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ et $\lambda \in K$

• Clairement : $N_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \geq 0$

• $N_\infty(\lambda x) = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda| \, |x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \, N_\infty(x)$

• $N_\infty(x) = 0$
$\Rightarrow \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| \leq 0$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| = 0$
$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$
$\Rightarrow x = 0_{K^n}$

• Par inégalité triangulaire dans K : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$
Par définition de N_∞ : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k + y_k| \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$
En passant au max : $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$ et donc $N_\infty(x+y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$

• On a donc : $\forall (x,y) \in (K^n)^2$, $\forall \lambda \in K$, $\begin{cases} N_\infty(x) \geq 0 \\ N_\infty(\lambda x) = |\lambda| \, N_\infty(x) \\ N_\infty(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{K^n} \\ N_\infty(x+y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y) \end{cases}$

et donc $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } K^n.}$

preuve du 5.3.1 : équivalences de normes

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$

• Comme $N_\infty(x)$ est un max, alors $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, $N_\infty(x) = |x_{i_0}|$

Mais $|x_{i_0}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = N_1(x)$ et on a donc $N_\infty(x) \leq N_1(x)$

De même $|x_{i_0}|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 = (N_2(x))^2$ et en prenant la racine : $N_\infty(x) \leq N_2(x)$

• $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| \leq N_\infty(x)$

En sommant pour k variant de 1 à n, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} N_\infty(x)$ et donc $N_1(x) \leq nN_\infty(x)$

De même : $|x_k|^2 \leq N_\infty(x)^2$

En sommant pour k variant de 1 à n, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} (N_\infty(x))^2$ et donc $(N_2(x))^2 \leq n(N_\infty(x))^2$

En prenant la racine : $N_2(x) \leq \sqrt{n}N_\infty(x)$