

Feuille d'exercices n°18 : chap. 7

Exercice 173. Soit $E = M_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E$. On pose: $\langle X, Y \rangle = 5xx' + 2yy' + 2xy' + 2x'y$

a) Déterminer la matrice symétrique $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$

b) Montrer que $\langle, \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 174. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On pose $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$.

On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

Montrer que $(E, \langle, \rangle)$ est un espace euclidien.

Exercice 175. Soit $E = C^0([0; 1])$. On pose $\forall f, g \in E$ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Montrer que $(E, \langle, \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Exercice 176. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

On pose $\forall (P, Q) \in E^2$ $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)Q(k)$

Est-ce que $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E ?

Exercice 177. Soit $E = C^1([0; 1])$.

On pose $\forall (f, g) \in E^2$ $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$

Montrer que $(E, \langle, \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Exercice 178. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall A, B \in E$ $\text{tr}(A^T B) \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A) \text{tr}(B^T B)}$

Exercice 179. Démontrer, en utilisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 180. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$.

Montrer que : $(\int_0^1 t f(t) dt)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 f(t)^2 dt$

Exercice 181. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$.

Que dire des x_k ?

Exercice 182. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée à $\langle, \rangle$.

Montrer que : $\forall x, y \in E$ $\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$

Exercice 183. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.

Montrer que : $\ker(A) = \ker(A^T A)$.

Exercice 184. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit A et B deux sous espaces vectoriels de E .

Démontrer que :
$$\begin{cases} a) A \cap A^\perp = \{0_E\} \\ b) A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp \\ c) (A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp \\ d) (A^\perp + B^\perp) \subset (A \cap B)^\perp \end{cases}$$