Feuille d'exercices n°19 : chap. 7

Exercice 185. *On considère* $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire défini par :*
$\forall (f,g) \in E^2 \ (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$
Soit $F = \{f \in E \ , \ f(0) = 0\}$.
a) Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E, *et trouver un supplémentaire de* F *dans* E.
b) Soit $g \in F^{\perp}$. *Montrer que :* $\int_0^1 t(g(t))^2 dt = 0$
c) Montrer que : $F^{\perp} = \{0_E\}$ *et en déduire que* $F^{\perp}$ *n'est pas supplémentaire de* F *dans* E.

Exercice 186. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille* (u,v,w) *avec* $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ *et* $w = (-1,-1,0)$.

Exercice 187. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$. *On pose* $\forall ((x,y,z),(x',y',z')) \in E^2$,
$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y+z)(x'+y'+z') + (y+z)(y'+z') + zz'$
a) Montrer que φ *définit un produit scalaire sur* E.
b) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base canonique de E.

Exercice 188. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique.*
On considère le plan P *d'équation* $2x + 2y - z = 0$
a) Trouver une base orthonormée de P *et compléter cette base en une base* B' *orthonormée de* $\mathbb{R}^3$.
Soit p *la projection orthogonale sur* P *et* s *la symétrie orthogonale par rapport à* P.
b) Déterminer la matrice de p *relativement à* B', *puis relativement à* B *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
c) Même question pour s.

Exercice 189. *On se place dans* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire canonique.*
On considère H *l'hyperplan d'équation :* $x + 2y - z - 3t = 0$
Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la projection orthogonale sur H

Exercice 190. *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien et* $u \in L(E)$.
Montrer que si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E *alors* $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_i), e_i >$

Exercice 191. *Soit* $E = M_{2,1}(\mathbb{R})$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E *tel que* (u,v) *soit une base orthonormée de* E *pour ce produit scalaire.*

Exercice 192. $\star$
Soit $(E, <>)$ *un espace préhilbertien réel.*
Une famille de vecteurs $(x_0, x_1, x_2, ..., x_p)$ *est* **obtusangle** *si :* $\forall (i,j) \in [\![0;p]\!] \ \ i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j > < 0$
a) On suppose que la famille $(x_0, x_1, x_2, ..., x_p)$ *est obtusangle. Prouver que* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *est libre.*
b) En déduire que si E *est euclidien de dimension* n, *alors toute famille obtusangle a u plus* $n+1$ *vecteurs.*