Feuille d'exercices n°20 : chap. 7

Exercice 193. $\star$

Soit n en entier naturel non nul. On munit $E = M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et la norme $||.||$ associée.
1) Trouver l'orthogonal du sous-espace vectoriel F des matrices scalaires de E. $F = \{\lambda I_n \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$
2) Soit $A \in E$. Déterminer le projeté orthogonale de A sur F.
3) Soit $A \in E$. Justifier l'existence de $m(A) = \min\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} ||A - \lambda I_n||$ et déterminer $m(A)$ en fonction de la norme et de la trace de A.

Exercice 194. $\star$

Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que :
p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $||p(x)|| \leq ||x||$

Exercice 195. Un petit problème ...

A) Préliminaires
a) Montrer que $\forall R \in \mathbb{R}[X]$ $\int_0^{+\infty} e^{-t} R(t)dt$ est convergente.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ qui est convergente d'après le a).
b) Calculer A_0
c) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (A_k).
d) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de A_k.

B) Un produit scalaire
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose $\forall (P, Q) \in E$ $\quad < P, Q >= \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)dt$
On pose $F = \mathbb{R}_2[X]$.

a) Montrer que $<, >$ définit un produit scalaire sur E.

On note (P_0, P_1, P_2) la base canonique de E. Autrement dit $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et $P_2(t) = t^2$
b) Appliqué l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à (P_0, P_1, P_2) afin d'obtenir une base orthonormale de F que l'on notera (Q_0, Q_1, Q_2)

C) Une projection orthogonale
On pose $R = X^3$ de tel sorte que : $\forall t \in \mathbb{R}$ $R(t) = t^3$
a) Déterminer $R^\perp$ la projection orthogonale de R sur F.
b) Calculer la distance de R àF.

D) Une minimisation
On pose $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ $\quad f(a, b, c) = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt}$
a) Interpréter $f(a, b, c)$ à l'aide de la norme associée à $<, >$.
b) Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ce minimum.