

Chapitre 7 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 7.1

On note $E = M_2(\mathbb{R})$. On pose pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $\langle X, Y \rangle = 2xx' + xy' + x'y + yy'$

Montrer que $(E, \langle, \rangle)$ est un espace euclidien.

Correction

On remarque que l'on peut écrire ce produit scalaire matriciellement en posant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$

Soit $(X, Y, Z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Alors : i) $\langle X, Y + \lambda Z \rangle = X^T A(Y + \lambda Z) = X^T A Y + \lambda X^T A Z = \langle X, Y \rangle + \lambda \langle X, Z \rangle$

ii) $\langle X, Y \rangle = X^T A Y = (X^T A Y)^T$ car on a un réel (vu comme une matrice 1×1).

Et donc $\langle X, Y \rangle = Y^T A^T X = Y^T A X = \langle Y, X \rangle$ car $A^T = A$

iii) $\langle X, X \rangle = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x + y)^2 \geq 0$

iv) $\langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow x^2 + (x + y)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow X = 0_E$

On a donc : $\forall (X, Y, Z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \langle X, Y + \lambda Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \lambda \langle X, Z \rangle \\ \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \\ \langle X, X \rangle \geq 0 \\ \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0_E \end{cases}$

Donc $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Comme E est de dimension finie : $(E, \langle, \rangle)$ est un espace euclidien.

Enoncé, Exercice 7.2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et sa structure euclidienne canonique. Soit $B = (i, j, k)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^3$ et P le plan d'équation : $x + y - z = 0$ dans B .

Déterminer les matrices relativement à B de p la projection orthogonale et de s la réflexion de plan P .

Correction

$i + j - k$ est normal à P donc $p(i + j - k) = 0_E$ et par linéarité $p(i) + p(j) - p(k) = 0_E \Leftrightarrow (1)$

$i - j \in P$ donc $p(i - j) = i - j$ et par linéarité $p(i) - p(j) = i - j \Leftrightarrow (2)$

$i + k \in P$ donc $p(i + k) = i + k$ et par linéarité $p(i) + p(k) = i + k \Leftrightarrow (3)$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow p(i) = \frac{2i-j+k}{3}$$

$$\text{Alors } (2) \Rightarrow p(j) = \frac{-i+2j+k}{3} \text{ et } (3) \Rightarrow p(k) = \frac{i+j+2k}{3}$$

$$\text{On a donc } M_B(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comme } s = 2p - Id_E \text{ alors } M_B(s) = 2M_B(p) - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{M_B(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M_B(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Enoncé, Exercice 7.3

Appliqué le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Correction

On suit l'algorithme du cours.

Etape 1 : On pose $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$

$$\langle u, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 \text{ et donc } e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : On pose $e_2 = \frac{v - \langle v, e_1 \rangle e_1}{\|v - \langle v, e_1 \rangle e_1\|}$

Application numérique : $\langle v, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 2) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Donc $v - \langle v, e_1 \rangle e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{6} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est de norme $\sqrt{3}$.

Donc $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Etape 3 : On pose $e_3 = \frac{w - \langle w, e_1 \rangle e_1 - \langle w, e_2 \rangle e_2}{\|w - \langle w, e_1 \rangle e_1 - \langle w, e_2 \rangle e_2\|}$

$$\begin{aligned} & w - \langle w, e_1 \rangle e_1 - \langle w, e_2 \rangle e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion

La base orthogonale obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est donc :

$$(e_1, e_2, e_3) \text{ avec } e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enoncé, Exercice 7.4

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $\forall (P, Q) \in E \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$

- a) Montrer que $\langle, \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
 b) Déterminer d la distance de X^3 à F .

Correction

a) • On commence par montrer que l'intégrale définissant $\langle, \rangle$ est convergente.

Soit $R \in E$. Alors $t \mapsto e^{-t} R(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $\frac{e^{-t} R(t)}{e^{-t/2}} = e^{-t/2} R(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $e^{-t} R(t) = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$.

Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors, par négligeabilité $t \mapsto e^{-t} R(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t} R(t) dt$ est convergente.

En particulier si $(P, Q) \in E^2$, alors en posant $R = PQ$ on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ convergente et donc $\langle, \rangle$ est bien définie sur E^2 .

• Soit $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i) $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) (Q(t) + \lambda R(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) R(t) dt$ car les intégrales sont convergentes et donc $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle$

ii) On a : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, évident par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

iii) $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt \geq 0$ car $\forall t \geq 0$, $e^{-t} P(t)^2 \geq 0$ et positivité de l'intégrale.

iv) $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt = 0$

Mais $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Donc par le théorème de l'intégrale nulle, on a $\forall t \geq 0$, $e^{-t} P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$

P est alors un polynôme ayant une infinité de racines et donc $P = 0_E$

On a alors : $\forall (P, Q, R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} i) \langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle \\ ii) \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \\ iii) \langle P, P \rangle \geq 0 \\ iv) \langle P, P \rangle = 0 \implies P = 0_E \end{cases} \quad \text{et on en déduit}$$

que : $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E .

b) • Calculs préliminaires. On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$

Alors, pour $k \geq 1$ et par intégration par parties, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k e^{-t} = 0$ et que les intégrales sont convergentes :

$$I_k = [-e^{-t} t^k]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} k t^{k-1} dt \text{ et donc } I_k = k I_{k-1}$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

On reconnaît la formule de récurrence définissant la factorielle (on peut aussi faire une récurrence) et on a : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

On remarquera pour les calculs que $\langle P, Q \rangle = \langle PQ, 1 \rangle$ et que $\langle X^k, 1 \rangle = I_k \dots$

• On va commencer par trouver une base orthogonale de F en appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique de F .

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$, ainsi la base canonique est la base (P_0, P_1, P_2) et on construit (Q_0, Q_1, Q_2) une base orthonormée de F .

Etape 1 : On pose $Q_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$

$$\|P_0\|^2 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_0 = 0! = 1$$

On a donc $Q_0 = 1$

Etape 2 : On pose $Q_1 = \frac{P_1 - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0}{\|P_1 - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0\|}$

$$\langle P_1, Q_0 \rangle = \langle X, 1 \rangle = I_1 = 1 \text{ donc } \tilde{Q}_1 = P_1 - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0 = X - 1$$

$$\langle \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_1 \rangle = \langle X - 1, X - 1 \rangle = \langle X^2 - 2X + 1, 1 \rangle = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2! - 2 \cdot 1 + 1 = 1 \text{ et donc } Q_1 = X - 1$$

Etape 3 : On pose $Q_2 = \frac{P_2 - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1}{\|P_2 - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1\|}$

$$\text{On pose } \tilde{Q}_2 = P_2 - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1$$

$$\langle P_2, Q_0 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle = I_2 = 2, \quad \langle P_2, Q_1 \rangle = \langle X^2, X - 1 \rangle = I_3 - I_2 = 6 - 2 = 4$$

$$\text{Donc } \tilde{Q}_2 = X^2 - 2 - 4(X - 1) = X^2 - 4X + 2$$

$$\langle \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_2 \rangle = \langle X^2 - 4X + 2, X^2 - 4X + 2 \rangle = \langle (X^2 - 4X + 2)^2, 1 \rangle$$

$$\text{donc } \langle \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_2 \rangle = \langle X^4 + 16X^2 + 4 + 4X^2 - 16X - 8X^3, 1 \rangle$$

$$\text{donc } \langle \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_2 \rangle = I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 4 \cdot 6 - 8 \cdot 6 + 40 - 16 + 4 = -24 + 24 + 4 = 4$$

$$\text{Donc } Q_2 = \frac{X^2 - 4X + 2}{2}$$

Bilan : $(Q_0, Q_1, Q_2) = (1, X - 1, \frac{X^2 - 4X + 2}{2})$ est une base orthonormée de F .

• Par définition $d = d(X^3, F) = \|X^3 - R\|$ ou R est la projection orthogonale de X^3 sur F .

Par le théorème de projection orthogonale, comme (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthonormée de F :

$$R = \langle X^3, Q_0 \rangle Q_0 + \langle X^3, Q_1 \rangle Q_1 + \langle X^3, Q_2 \rangle Q_2$$

$$\langle X^3, Q_0 \rangle = \langle X^3, 1 \rangle = I_3 = 6,$$

$$\langle X^3, Q_1 \rangle = \langle X^3, X - 1 \rangle = I_4 - I_3 = 24 - 6 = 18,$$

$$\langle X^3, Q_2 \rangle = \langle X^3, \frac{X^2 - 4X + 2}{2} \rangle = \frac{I_5 - 4I_4 + 2I_3}{2} = \frac{120 - 96 + 12}{2} = 18$$

$$\text{Donc } R = 6 + 18(X - 1) + 18 \frac{X^2 - 4X + 2}{2} = 9X^2 - 18X + 6$$

On a alors : $d = \|X^3 - R\|$ qui, après application numérique (longue) donne : $\boxed{d = 6}$

Remarque : on a fait la fin des calculs avec l'ordinateur, d'où la solution Python suivante :

```

from numpy.polynomial import Polynomial
    # produit scalaire
def fact(k):
    if k==0:
        return 1
    return k*fact(k-1)
def ps(P,Q):
    R=P*Q
    n=R.degree()
    r=0
    for i in range(n+1):
        r=r+R.coef[i]*fact(i)
    return r

    # création base canonique
N=3+1 # de R_3[X]
BC=[Polynomial([0]*k+[1]) for k in range(N)]
    # algo de scmidt à base canonique
NewB=[Polynomial([1])] # NewB=nouvelle base
for i in range(1,N):
    NP=BC[i]
    for j in range(0,i):
        NP=NP-(ps(BC[i],NewB[j])/ps(NewB[j],NewB[j]))*NewB[j]
    NewB.append(NP)

    # affichage de la base orthogonale
for i in range(len(NewB)):
    print(NewB[i].coef)

    # projection de X^3 sur R_2[X]
R,PR=BC[3],Polynomial([0])
for k in range(3):
    PR=PR+(ps(R,NewB[k])/ps(NewB[k],NewB[k]))*NewB[k]

print('projection de X^3',PR.coef)

    # distance
d=ps(R-PR,R-PR)**(1/2)
print('d=',d)

```
