Feuille d'exercices n°21 : chap. 8

Exercice 196. *Soit E un K espace vectoriel.*

Soit N une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall x \in E \ , \ x \neq 0_E \Rightarrow N(x) > 0 \\ N(0_E) = 0 \\ \forall (x,y) \in E^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ N(\lambda x + y) \leq |\lambda|\, N(x) + N(y) \end{cases}$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 197. $(\star)$
Soit E un K espace vectoriel et soit N_1 et N_2 deux normes sur E.
On pose $\forall x \in E \ , \ N(x) = \sqrt{N_1(x)^2 + N_2(x)^2}$
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 198. *Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles bornées.*
Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose : $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N'(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(|u_n| + |u_{2n}|)$
a) Montrer que N et N' sont deux normes équivalentes sur E.
b) Optimiser α et β tels que : $\forall x \in E \ , \ \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$

Exercice 199. *Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés.*
Montrer que : $\begin{array}{cccc} N & : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (e,f) & \mapsto & Max(N_E(e), N_F(f)) \end{array}$ *est une norme sur $E \times F$*

Exercice 200. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P \in E \ , \ N(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$*
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 201. *Soit n un entier supérieur ou égale à 2.*
Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A, B \in E$ $N(AB) = N(BA)$?

Exercice 202. *Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $\forall X = (x,y) \in E \ , \ N(X) = Max(|x|, |2x - y|)$*
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Dessiner la boule unité correspondant à cette norme.
c) Trouver $(a,b) \in]0; +\infty[^2$ tel que : $\forall X \in E \ , \ a\,||X||_\infty \leq N(X) \leq b\,||Y||_\infty$ avec a le plus grand possible et b le plus petit possible.

Exercice 203. *Soit $E = C^1([0;\pi], \mathbb{R})$. On pose $\forall f \in E \ , \ N(f) = \sqrt{\int\limits_0^\pi sin(t) f'(t)^2 dt + f(1)^2}$*
Est-ce que N est une norme sur E ?

Exercice 204. *Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels distincts et $E = \mathbb{R}_n[X]$.*
On pose $\forall P \in E \ , \ N(P) = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) P(x_k)^2}$
Montrer que N est une norme sur E.