Feuille d'exercices n°22 : chap. 8 et 9

Exercice 205. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $E = M_n(\mathbb{R})$. *On pose pour* $A = (a_{i,j}) \in E$, $N(A) = \sup\limits_{i \in [\![1;n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

a) Montrer que N *est une norme sur* E.
b) Montrer que : $\forall (A,B) \in E^2 \quad N(AB) \leq N(A)N(B)$
(On dit que l'on a une norme d'algèbre)

Exercice 206. $\star\star$ *(Norme p)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ $N_p(x) = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

Montrer que N_p *est une norme sur* E.

Exercice 207. $\star\star$ *(Norme p)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $E = C^0([0;1])$ *et* $\forall f \in E$ $N_p(x) = (\int\limits_0^1 |f(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}}$

Montrer que N_p *est une norme sur* E.

Exercice 208. *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé.*
a) Montrer que tout ouvert est une union de boules ouvertes.
b) Montrer que si F *est un sous espace vectoriel de* E *alors* $\overline{F}$ *est un sous espace vectoriel de* E.

Exercice 209. *(*$\star$*)*
Soit (E, N) *un espace vectoriel normé. On suppose que* F *est un sous espace vectoriel de* E *ouvert.*
Montrer que $F = E$.

Exercice 210. *Montrer que l'intérieur et l'adhérence d'une partie convexe sont convexes.*

Exercice 211. *On considère les parties de* $\mathbb{R}^2$ *suivantes :* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 < |x-y| < 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y \in [0,1] \end{cases} \}$ $\qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$

Dire si ces parties sont ouvertes, fermés, bornées et démontrer vos affirmations.

Exercice 212. *(*$\star$*)*
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$, *et* $N_1(f) = \int\limits_0^1 |f(t)| \, dt$

On admet que N_1 *et* N_∞ *sont des normes sur* E.
a) Les normes N_1 *et* N_∞ *sont-elles équivalentes ?*
On pose $A = \{f \in E \ , \ f(1) > 0\}$
b) A *est-il un ouvert de* (E, N_∞) *?*
c) A *est-il un ouvert de* (E, N_1) *?*