Feuille d'exercices n°23 : chap. 9

Exercice 213. *Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N). On note d la distance associée à N. Pour $x \in E$ on pose $d(x,A) = \inf\limits_{A \in A} d(x,a)$*
a) Montrer que $d(x,A)$ est bien définie.
b) Montrer que l'application δ définie de E dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in E\ ,\ \delta(x) = d(x,A)$ est 1 lipschitzienne.
c) On suppose de plus que A est fermé.
Montrer alors que $\forall x \in E\ ,\ d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

Exercice 214. ($\star$)
Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 215. *Déterminer (dessiner) l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :*
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 - 1 \leq |y| \leq 1 - x^2\}$

Exercice 216. *Etudier* $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$ *avec* $A_n = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{n})^n & \frac{sin(n)}{n} \\ \frac{ch(n)}{sh(n+1)} & -\pi \end{pmatrix}$

Exercice 217. *Etudier* $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$ *avec* $A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix}$ *ou* $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 218. *Montrer que l'application* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{3x^2y+2y^3}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$ *est continue en* $(0,0)$

Exercice 219. *Montrer que l'application* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$

Exercice 220. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Montrer que $f(0) = 0$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) = nf(1)$
c) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z}\ ,\ f(m) = mf(1)$
d) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q}\ ,\ f(r) = rf(1)$
e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = f(1)x$

Exercice 221. $\star$
Soit $E = C^0([0,1])$. On pose $\forall f \in E\ \varphi(f) = f(1)$ et $\Phi(f) = \int\limits_{[0;1]} f$
On considère les deux normes (admis) sur E définies par
$\forall f \in E\ N_\infty(f) = \sup\limits_{[0;1]} |f(t)|$ *et* $N(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$
φ et Φ sont-elles continues de (E, N_∞) dans $\mathbb{R}$?
φ et Φ sont-elles continues de (E, N) dans $\mathbb{R}$?