Feuille d'exercices n°24 : chap. 9

Exercice 222. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ $n+1$ *réels distincts.*
On pose $\forall P \in E \ N(P) = \max\limits_{i \in [\![0;n]\!]} |P(a_i)|$
a) Montrer que N *est une norme sur* E.
b) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *et soit* $P \in E$
Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = P \Leftrightarrow \forall i \in [\![0;n]\!]\ ,\ \lim\limits_{k\to+\infty} P_k(a_i) = P(a_i)$

Exercice 223. *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé. On pose* $\forall x \in E\ ,\ f(x) = \frac{1}{1+N(x)}$
Montrer que f *est 1-lipschitzienne.*

Exercice 224. *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé. On appelle* B *la boule ouverte de centre* 0_E *et de rayon 1.*
On pose $\forall x \in E\ ,\ f(x) = \frac{x}{1+N(x)}$
a) Montrer que f *est à valeur dans* B.
b) Montrer que f *est une bijection de* E *dans* B
c) Montrer que f *et* f^{-1} *sont continues.*

Exercice 225. *Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de* $M_n(\mathbb{R})$ *est un fermé.*

Exercice 226. *Montrer que l'application* $A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto P_A(X) = det(XI_n - A)$ *est continue.*

Exercice 227. *Soit* $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} i\,|x_i| \leq 1\}$ *et* f *une application continue de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *admet un maximum et un minimum sur* E.

Exercice 228. *Trouver des équivalents en* $+\infty$ *de* $u_n = 1,001^n + n^{10^6}$, $v_n = ln(n^2 + 7n + 127)$, $w_n = n^{100} + n!$, , $x_n = 10^n + n!$, $y_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1}$ *et* $z_n = arcos(1 - \frac{1}{n})$

Exercice 229. $(\star)$
Donner un équivalent de $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k!$

Exercice 230. *Soit* $(a, b) \in [0; +\infty[^2$
On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = a$, $v_0 = b$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$
Etudier ces deux suites.

Exercice 231. *Etudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}^+$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n}$

Exercice 232. *a) Etudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = sin(u_n)$
b) $(\star\star)$ *Etudier la nature de* $\sum u_n$

Exercice 233. $(\star\star)$
Soit (E, N_1) *un espace vectoriel normé de dimension finie.*
Soit (F, N_2) *un espace vectoriel normé.*
On pose $\forall \varphi \in L(E, F)\ ,\ |||\varphi||| = \sup\limits_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{N_2(\varphi(x))}{N_1(x)}$
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $L(E, F)$