A rendre le jeudi 27 novembre 2025

Devoir à la maison n°5 de Mathématiques

Code couleur :	noir	exo 1 et exo 2 pour réviser, après plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

Exercice 1 : Révisions

1) Montrer que : $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sh(t)-ln(1+t)}{e^t t^{5/2}} dt$ est convergente.

2) Etudier suivant le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+n^\alpha}$

Exercice 2 : une norme algébrique sur $M_n(\mathbb{R})$

On pose : $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\begin{array}{rccl} N & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A=(a_{i,j}) & \longmapsto & n \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| \end{array}$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer que N est une norme d'algèbre, c'est-à-dire que : $\forall (A,B) \in E^2$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$

Exercice 3 : e3A PC 2020 exercice 5

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P, Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
   (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 : ccINP MP 2025, mathématiques 2, exercice 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n:

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q1) Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Q2) Justifier que pour tout réel θ : $P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Q3) Justifier la convergence de cette intégrale.

Q4) Démontrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q5) Calculer pour n et m entiers naturels, $\int\limits_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$.

Q6) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5 : centrale 2025 PSI, mathématiques 1 : début

Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par: $\rho(M) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A - Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I - Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \ldots C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|L_i\|$, montrer que :

   $$\|AX\| \leqslant M\sqrt{n}$$

   On pourra au préalable s'intéresser à la i^{e} ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $\quad N(A) = \sup\limits_{X_0 \neq 0} \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. En est-il de même pour l'application $S : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto & \rho(M) \end{array} \right.$? (5/2)

5. Soit $\Delta \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \ldots, \delta_n$ les termes diagonaux.
   Vérifier que $N(\Delta) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta_i|$.

6. À l'aide de l'application $X \longmapsto \|AX\|$, démontrer que: $\quad N(A) = \max\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

7. Établir que : $\forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ \|AX\| \leqslant N(A)\|X\|$.

8. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

   $$N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

9. Montrer que : $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|C_i\| \leqslant N(A)$.

10. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

    En déduire $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.