Chapitre 8 e.v.n. : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 8.1

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. On pose $\forall P \in E \ , \ N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$
Montrer que N est une norme sur E.

Correction

Déjà N est une application de E dans $\mathbb{R}$.
Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

i) $N(P) \geq 0$ est évident.

ii) $N(\lambda P) = \sum_{k=0}^{n} |\lambda P(k)| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda| \, |P(k)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |P(k)| = |\lambda| \, N(P)$

iii) $N(P) = 0$
$\Rightarrow \sum_{k=0} |P(k)| = 0$ somme de termes positifs
$\Rightarrow \forall k \in [\![0; n]\!] \ , \ |P(k)| = 0$
$\Rightarrow \forall k \in [\![0; n]\!] \ , \ P(k) = 0$ on a un polynôme de degré $\leq n$ admettant $n+1$ racines
$\Rightarrow P = 0_E$

iv) Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$: $\forall k \in [\![0; n]\!] \ , \ |(P+Q)(k)| = |P(k) + Q(k)| \leq |P(k)| + |Q(k)|$
En sommant sur k, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} |(P+Q)(k)| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(k)| + \sum_{k=0}^{n} |Q(k)|$
Et donc $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$

On a alors : $\forall (P, Q) \in E^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \begin{cases} N(P) \geq 0 \\ N(\lambda P) = |\lambda| \, N(P) \\ N(P) = 0 \Rightarrow P = 0_E \\ N(P+Q) \leq N(P) + N(Q) \end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{N \text{ est une norme sur } E.}$

Enoncé, Exercice 8.2

On pose $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $\forall X = (x, y) \in E$, $N(X) = |x| + |x + y|$ et $||X||_\infty = Max(|x|, |y|)$
On rappelle que $||.||_\infty$ est une norme (cours).

a) Montrer que N est une norme.

b) Dessiner la boule unité associée à la norme N.

c) ($\star$) Trouver $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que : $\forall X \in E$, $\alpha N(x) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$
avec α le plus grand possible et β le plus petit possible.

Correction

Soit $X = (x, y) \in E$ et $Y = (x', y') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $N(X) \geq 0$ est évident.

ii) $N(\lambda X)$
$= N((\lambda x, \lambda y))$
$= |\lambda x| + |\lambda x + \lambda y| = |\lambda x| + |\lambda(x + y)| = |\lambda| |x| + |\lambda| |(x + y)| = |\lambda| (|x| + |(x + y)|) = |\lambda| N(X)$

iii) $N(X) = 0$
$\Rightarrow |x| + |x + y| = 0$ somme de deux termes positifs
$\Rightarrow |x| = 0$ et $|x + y| = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow X = 0_E$

iv) Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:
$|x + x'| \leq |x| + |x'|$ et $|(x + x') + (y + y')| = |(x + y) + (x' + y')| \leq |x + y| + |x' + y'|$
En ajoutant ces deux inégalités on obtient :
$N(X + Y)$
$= |x + x'| + |(x + x') + (y + y')| \leq |x| + |x'| + |x + y| + |x' + y'| = |x| + |x + y| + |x'| + |x' + y'| = N(X) + N(Y)$

On a donc : $\forall X, Y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} N(P) \geq 0 \\ N(\lambda X) = |\lambda| N(X) \\ N(X) = 0 \Rightarrow X = 0_E \\ N(X + Y) \leq N(X) + N(Y) \end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{N \text{ est une norme sur } E.}$

b) Soit $X = (x, y) \in E$. On va découper le plan en 4 zones (délimités en rouge sur le graphique) suivant le signe de x et de $x + y$

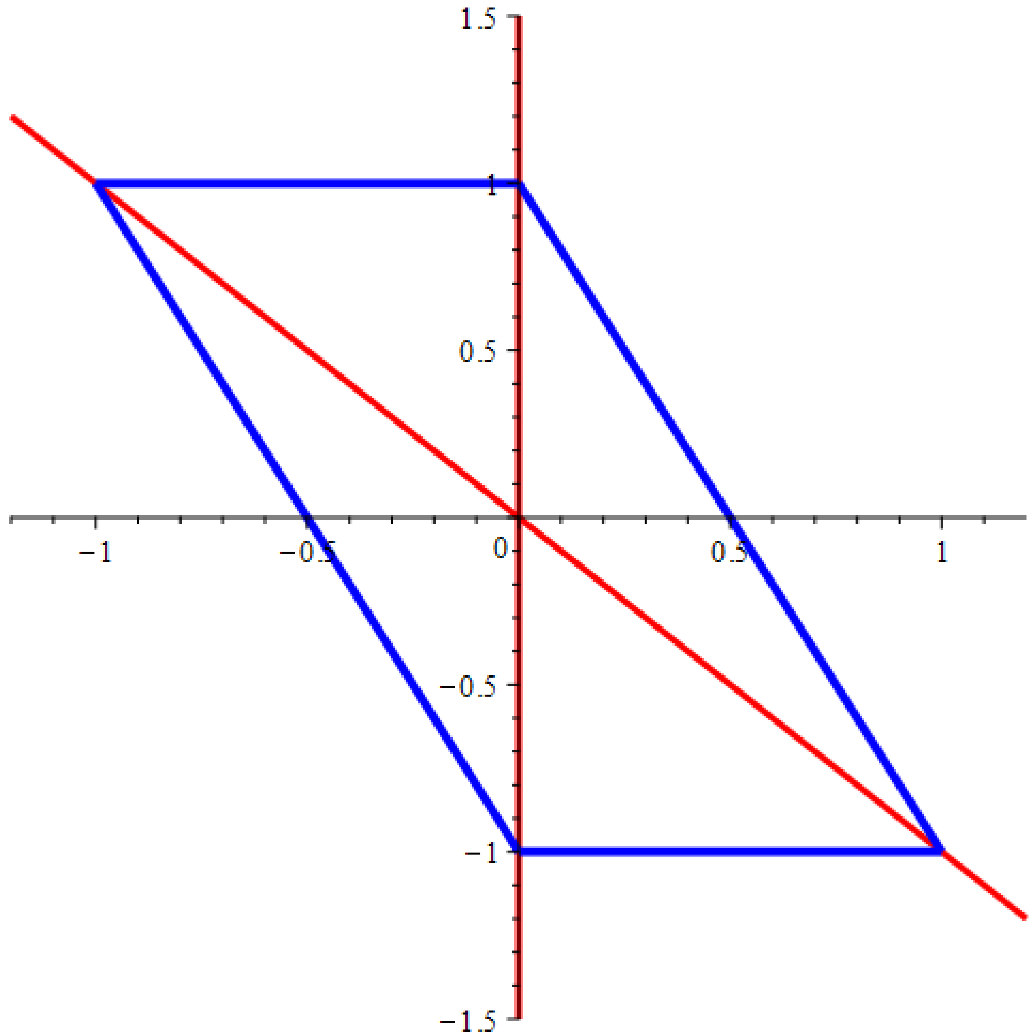
Cas 1 : $x \geq 0$ et $x + y \geq 0$
Alors $N(X) = 1 \Leftrightarrow x + (x + y) = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x$

Cas 2 : $x \leq 0$ et $x + y \leq 0$
Alors $N(X) = 1 \Leftrightarrow -x - (x + y) = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

Cas 3 : $x \leq 0$ et $x + y \geq 0$
Alors $N(X) = 1 \Leftrightarrow -x + (x + y) = 1 \Leftrightarrow y = 1$

Cas 4 : $x \geq 0$ et $x + y \leq 0$
Alors $N(X) = 1 \Leftrightarrow x - (x + y) = 1 \Leftrightarrow y = -1$

On obtient alors le graphique suivant pour la sphère unité (la boule unité est à l'intérieur)



c) Soit $X = (x, y) \in E$.

- $|x+y| \leq |x| + |y| \leq ||X||_\infty + ||X||_\infty = 2\,||X||_\infty$

On a donc : $|x+y| \leq 2\,||X||_\infty$
De plus $|x| \leq ||X||_\infty$, en ajoutant à l'inégalité précédente :
$|x+y| + |x| \leq 3\,||X||_\infty \Leftrightarrow N(X) \leq 3\,||X||_\infty \Leftrightarrow \frac{1}{3}N(X) \leq ||X||_\infty$

- Par la deuxième inégalité triangulaire : $|y| - |x| \leq |x+y|$ et donc $|y| \leq |x| + |x+y| = N(x)$

D'autre part : $|x| \leq |x| + |x+y| = N(X)$
Avec ces deux inégalités on a donc : $Max(|x|, |y|) = ||X||_\infty \leq N(X)$

Bilan : $\boxed{\forall X \in E \;\; \frac{1}{3}N(X) \leq ||X]||\infty \leq N(X)}$

Montrons que α et β sont les meilleurs choix possibles. Si $\forall X \in E$, $\alpha N(x) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$
Alors en $X = (0, 1)$ on obtient : $N(X) = 1$ et $||X||_\infty = 1$ donc $\alpha \leq 1 \leq \beta \Rightarrow 1 \leq \beta$, le choix $\beta = 1$ fait ci-dessus est donc le meilleur.
En $X = (1, 1)$ on obtient : $N(X) = 3$ et $||X||_\infty = 1$ donc $\alpha 3 \leq 1 \leq 3\beta \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{3}$, le choix $\alpha = \frac{1}{3}$ fait ci-dessus est donc le meilleur.

On a fait les bons choix de α et β, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous :