Chapitre 9 : Topologie d'un espace vectoriel normé, applications

Dans ce chapitre $(E, ||.||)$ désigne un K espace vectoriel normé de dimension quelconque avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Topologie d'un espace vectoriel normé

1.1 Ouverts

1.1.1 Point intérieur

Définition. *Soit A une partie de E. Alors, on dit que : $a \in A$ est un* **point intérieur** *de A si et seulement si $\exists r > 0 \ , \ \mathring{B}(a, r) \subset A$*

Remarques. *On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.*
$\mathring{A}$ est appelé intérieur de A
On a de manière immédiate $\mathring{A} \subset A$
On peut aussi définir la notion de point extérieur à A (point intérieur au complémentaire de A) mais la notion n'est pas au programme.

Exemple. *Si $A =]0, 1[\times[0, 1]$ alors $\mathring{A} =]0, 1[\times]0, 1[$*

1.1.2 Ouvert

Définition. *Soit A une partie de E. Alors, on dit que :*
A est un **ouvert** *de E si et seulement si $\forall a \in A \ , \ \exists r > 0 \ , \ \mathring{B}(a, r) \subset A$*

Remarques. *Autrement dit, A est un ouvert si et seulement si A est l'ensemble de ses points intérieurs.*
On a donc : A ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$

1.1.3 Exemples

Exemples. *$\emptyset$ est un ouvert*
E est un ouvert
$]0, 1[$ est un ouvert
$]0; 1]$ n'est pas un ouvert
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ est un ouvert

1.1.4 Propriétés

Proposition. *Une boule ouverte est un ouvert de E.*

preuve :

Proposition. *Si $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ une famille* **finie** *d'ouverts de E alors : $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ et $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ sont des ouverts de E*

Si $(A_i)_{i\in I}$ une famille **infinie** *d'ouverts de E alors : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un ouvert de E*

Remarque. *Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert, par exemple $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}[$*

preuve :

1.2 Fermés

1.2.1 Définition

Définition. *On dit que A une partie de E est une partie fermée de E si et seulement si son complémentaire dans E est ouvert.*

1.2.2 Propriétés

Proposition. *Une boule fermée est un fermé de E. Une sphère est un fermé de E.*

preuve :

1.2.3 Exemples

Exemples. *$\emptyset$ est un fermé.*
E est un fermé.
$[0,1]$ est un fermé.
$]0;1]$ n'est pas un fermé.
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ est un fermé.

1.2.4 Autres propriétés

Proposition. *Si $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ une famille* **finie** *de fermés de E alors : $\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n$ et $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ sont des fermés de E*

Si $(A_i)_{i\in I}$ une famille **infinie** *de fermés de E alors : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un fermé de E*

Remarque. *Une union quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé, par exemple : $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [0; 2 - \frac{1}{n}]$*

preuve :

1.3 Partie bornée

Définition. *On dit qu'une partie A de E est bornée si et seulement si $\exists M > 0\ ,\ \forall x \in A\ \ ||x|| \leq M$*

Remarques. *On a donc $A \subset \mathring{B}(0_E, M)$*
Plus généralement A est bornée si A est inclu dans une boule (ouverte ou fermée).
Les boules et les sphères sont donc bornées.
Une fonction f d'un ensemble X à valeurs dans E est bornée si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E.

1.4 Partie convexe

Définition. *Soit A une partie de E.*
Alors on dit que A est **convexe** *si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2\ ,\ \forall \lambda \in [0;1]\ ,\ \lambda x + (1-\lambda)y \in A$*

Remarques. *Si $(x,y) \in E^2$ alors l'ensemble $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ \lambda \in [0;1]\}$ est appelé "segment xy".*
On a alors : A convexe si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2\ ,\ [x,y] \subset A$

Exemples. Interprétation graphique

Lemme. *Les boules ouvertes (ou fermées) sont convexes.*

2 Suite d'un espace vectoriel normé et utilisation en topologie

Dans ce paragraphe $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Définition

Définition. *On appelle suite de E toute application de $\mathbb{N}$ dans E.*

Remarque. *Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans E on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.*

2.1.2 Suite bornée

Définition. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée*
si et seulement si $\exists M > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ , ||u_n|| \leq M$

2.1.3 Rappel

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \epsilon$

2.2 Convergence et divergence d'une suite dans un espace vectoriel normé

2.2.1 Définitions

Définitions. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $a \in E$.*
Alors on dit que la suite (u_n) converge vers a si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - a|| = 0$
Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente

Remarques. *On se ramène donc, via la norme, aux suites à valeurs réelles.*
Attention, cette définition dépend de la norme !

2.3 Propriétés d'une suite convergente

2.3.1 Unicité de la limite

Lemme. *Si la suite (u_n) converge vers a et vers b alors $a = b$.*

Remarques. *On note alors : $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$*
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0_E \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - a|| = 0$

preuve :

2.3.2 Une suite convergente est bornée

Lemme. *Si la suite (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée*

Remarque. *La réciproque est évidemment fausse.*

preuve :

2.4 Opération sur les limites

Lemme. *Addition*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E tels que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$
Alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$

preuve :

Lemme. *Soit (λ_n) une suite de $K^{\mathbb{N}}$ et (v_n) une suite de E. Alors :*
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in E$ et $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in K \Rightarrow \lambda_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda a$

preuve

Lemme. *Produit*
Soit (λ_n) *est une suite de* $K^{\mathbb{N}}$ *et* (v_n) *une suite de* E *alors :*
(v_n) *bornée et* $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow (\lambda_n v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E$
(λ_n) *bornée et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \Rightarrow (\lambda_n v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E$

preuve

2.5 Suites extraites

Définition. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* E.
Alors, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si il existe une application strictement croissante* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$

Remarque. *On a forcément* $\varphi(n) \geq n$.

Exemples. *On a par exemple les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 36}$ *ou encore* $(u_{n^2+n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ...

Lemme. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.*

preuve :

Lemme. *(un exemple utile)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* E *et* $a \in E$. *Alors* $\begin{cases} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

preuve :

2.6 Adhérence, densité

2.6.1 Point adhérent, adhérence

Définitions. *Soit* A *une partie de* E. *Soit* $a \in A$.
Alors on dit que a *est un point adhérent à* A *si et seulement si* $\forall r > 0$, $\mathring{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$.
On note $\overline{A}$ *l'ensemble des points adhérents à* A.
$\overline{A}$ *est appelée adhérence de* A

Remarque. *On a* $A \subset \overline{A}$

Exemples. *exemple 1 : Si* A *est une partie bornée de* $\mathbb{R}$ *alors* $sup(A)$ *est un point adhérent à* A.
(remarque par extension si $sup(A) = +\infty$ *on dit que* $+\infty$ *est adhérent à* A. *Même chose avec* inf*)*

exemple 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est adhérent à* $GL_2(\mathbb{R})$

2.6.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. *Soit* A *une partie de* E. *Soit* $a \in A$.
Alors a *est adhérent à* $A \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

Remarque. *Autrement dit :* a *est adhérent à* A *si et seulement si* a *est limite d'une suite d'éléments de* A.

preuve :

2.6.3 Lien avec les fermés

Proposition. A *est un fermé de* E *si et seulement si* $A = \overline{A}$

Remarque. *Autrement dit* A *est fermé si et seulement si* A *est l'ensemble de ses points adhérents.*
Ou encore si tout point adhérent de A *est dans* A *(puisque l'autre inclusion est toujours vraie).*

Corollaire. A *est un fermé de* $(E, ||.||)$ *si et seulement si toute suite convergente de* $A^{\mathbb{N}}$ *à sa limite dans* A.

preuve :

2.6.4 Densité

Définition. *Soit A une partie de E. Alors on dit que A est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$*

Remarque. *Autrement dit tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A.*

Exemples. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir cours de sup)*
$GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (preuve peut-être plus tard...)

2.6.5 Frontière : compléments Hors programme

Définition. *Soit A une partie de E. Alors on pose $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$*
∂A est appelée frontière de A

Remarques. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion)*
$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A (au sens de l'inclusion)
$\partial A = \overline{A} \cap C_E(\mathring{A})$
Hors programme mais on utilisera un peu le mot dans le chapitre des fonctions de plusieurs variables.

Exemples. *La frontière de $]0;2]$ est $\{0;2\}$*
La frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$
La frontière d'une boule est la sphère de même centre et de même rayon.

2.7 Invariance par norme équivalentes

2.7.1 Lemme préliminaires

Lemme. *Si E est muni de deux normes* **équivalentes** *N_1 et N_2.*
Alors toute partie ouverte pour l'une est ouverte pour l'autre.

Corollaire. *Les notions d'ouverts, de fermés, d'intérieurs, d'adhérence, de convergence de suites sont les mêmes pour deux normes équivalentes*

Corollaire. *Dans un K espace vectoriel* **de dimension finie** *les notions topologiques étudiées dans ce chapitre sont les mêmes indépendamment de la norme choisie.*

preuve :

2.8 Cas particulier de la dimension finie : Convergence par coordonnée

Propriété. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.*
Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E et soit $\lambda \in E$.
On écrit les u_n et λ dans la base B : $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$ et $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$
Alors : $(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;p]\!]$, $u_{n,i} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$

preuve :

2.9 Exemples

2.9.1 Exemple 1 : En dimension finie

Soit $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche : $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$

2.9.2 Exemple 2 : En dimension infinie

On pose$P_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $P_n(t) = t^n$ et on étudie la convergence de (P_n) pour la norme $N_1(P) = \int\limits_0^1 |P(t)|\, dt$ et pour la norme $N_2(P) = \sup\limits_{t \in [0;1]} |P(t)|$

3 Limite et continuité

Dans cette partie on considère (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés.

3.1 Limite en un point adhérent

3.1.1 Définition

Définition. *Soit f une application d'une partie A de E dans F. Soit a un point adhérent à A et soit $b \in F$. Alors, on dit que : f admet b pour limite au point a
si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$, $N_E(x - a) \leq \eta \Rightarrow N_F(f(x) - b) \leq \epsilon$*

Remarques. *Si $E = F = \mathbb{R}$ on retrouve les définitions vue en sup.
Si $E = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}$ on peu étendre cette définition avec $-\infty$ et $+\infty$ comme en sup...*

3.1.2 Propriétés

Propriété. *(Unicité de la limite)
Si f admet b_1 et b_2 pour limites en a alors $b_1 = b_2$.*

preuve :

Notations On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$
On a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - b) = 0_F \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} N_F(f(x) - b) = 0$

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème . *Soit une application f d'une partie A de E et à valeurs dans F.
Soit a un point de E adhérent à A, soit $b \in F$
Alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$*

preuve :

3.1.4 Opérations sur les limites

Lemme. *(addition)
Soit f et g deux applications d'une partie A de E à valeurs dans F.
Soit $b_1, b_2 \in F$ et a un point adhérent à A.*

$$\textit{Alors} \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1 \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a} (f + g)(x) = b_1 + b_2$$

preuve :

Lemme. *(produit par un scalaire)
Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F.
Soit λ une application d'une partie A de E à valeurs dans K.
Soit $b \in F$, $\Lambda \in K$ et a un point adhérent à A.*

$$\textit{Alors} \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \Lambda \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \Lambda b$$

preuve :

Lemme. *(inverse)
Soit λ une application d'une partie A de E à valeurs dans K.
Soit $b \in K$ tel que $b \neq 0$ et a un point adhérent à A.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$*

preuve :

Lemme. *(composition)*
Soit (E, N_1), (F, N_2) *et* (G, N_3) *trois espaces vectoriels normés.*

Soit f *une application d'une partie* A *de* E *à valeurs dans* F*.*
Soit g *une application d'une partie* B *de* F *à valeurs dans* G*.*
On suppose que $f(A) \subset B$

Soit a *un point adhérent à* A*. On suppose que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Alors b *est adhérent à* B *et* $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c \in G \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

preuve :

3.2 Continuité

3.2.1 Continuité en un point

Définition. *Soit* f *une fonction définie sur une partie* A *de* E *et à valeurs dans* F*. Soit* $a \in A$*.*
Alors on dit que f *est continue en* a *si et seulement si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

3.2.2 Prolongement

Si a est un point adhérent à $A \subset E$ et si f est une fonction de A dans F, et si de plus : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in F$, alors il y a deux cas :

cas 1 : $a \in A$
Alors $b = f(a)$

cas 2 : $a \notin A$
Alors a est adhérent à A.
f n'est pas définie en a mais on peut prolonger f en a en posant $\widetilde{f}(a) = b$.
On obtient alors une application $\widetilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ et on vérifie aisément que celle-ci est continue en a.

On dit que l'on a **prolongé** f **par continuité en** a. Dans la pratique, et par abus de notation on conservera souvent la notation f pour le prolongement, au lieu de $\widetilde{f}$

3.2.3 Caractérisation séquentielle

Théorème . *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*
Soit f *une application d'une partie* A *de* E *et à valeurs dans* F*. Soit* a *un point de* A*.*

Alors : f *est continue au point* a
si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$

preuve :

3.2.4 Continuité sur une partie

Définition. *Soit une application* f *une application d'une partie* A *de* E *et à valeurs dans* F*.*
Si f *est continue en tout point de* A*, alors on dit que* f **est continue sur** A

3.3 Opérations sur les fonctions continues

Théorème . • *Soit f et g deux applications continues sur une partie A de E à valeurs dans F.*
Alors $f+g$ est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans F et soit λ une application continue de A dans K.*
Alors λf est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans K qui ne s'annule pas sur A*
Alors $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans F et g une application continue de B dans G. On suppose $f(A) \subset B$*
Alors $g \circ f$ est continue sur A.

preuve :

3.4 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

3.4.1 Théorème

Théorème . *Soit f une application continue de (E, N_E) dans (F, N_F).*
Alors : A est un fermé de $F \Rightarrow f^{-1}(A)$ est un fermé de E
A est un ouvert de $F \Rightarrow f^{-1}(A)$ est un ouvert de E

3.4.2 Corollaire

Corollaire. *Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors :* $\begin{cases} \{x \in E \ , \ f(x) > 0\} \text{ est un ouvert} \\ \{x \in E \ , \ f(x) = 0\} \text{ est un fermé} \\ \{x \in E \ , \ f(x) \geq 0\} \text{ est un fermé} \end{cases}$

preuve :

3.4.3 Exemples

Une boule ouverte est ouverte.
L'ensemble des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{R})$ est un ouvert.

3.5 Fonctions Lipschitzienne

Définitions. *Soit f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F. Soit $k \geq 0$*
Alors on dit que : f est k-lipschitzienne de rapport k si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2 \ , \ ||f(x) - f(y)||_F \leq k\, ||x-y||_E$

On dit que f est lipschitzienne si et seulement si il existe $k \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Théorème . *Soit f une application* **k-lipschitzienne** *d'une partie A de E et à valeurs dans F alors :*
f est continue sur A

preuve :

Exemples. *La norme est 1-lipschitzienne*
Une projection orthogonale est 1-lipschitzienne.

3.6 Continuité par coordonnée quand l'espace d'arrivée est de dimension finie

Théorème . *Soit f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F avec F de dimension finie.*
Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
On note alors $\forall x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$ et $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base B.
On a ainsi définit n applications de A dans K, appelées applications coordonnées de f dans la base B.

On a alors : f continue sur $A \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, f_k est continue sur A

preuve :

3.7 Théorème des bornes atteintes

Théorème . *Toute fonction réelle continue sur une partie non vide, fermée et bornée d'un espace vectoriel normé* **de dimension finie** *est bornée et atteint ses bornes.*

preuve : admis

Remarque. *Autre formulation : Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur une partie non vide, fermée, bornée de E un K espace vectoriel de dimension finie.*
Alors, $\exists a, b \in A$, $\forall x \in A$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Exemple. *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(M) = AM + BM + CM$*

3.8 Exemple de continuité

3.8.1 Applications linéaires

Théorème . *Soit f une application linéaire entre E un K espace vectoriel normé* **de dimension finie** *et F un K espace vectoriel normé. Alors f est continue*

Lemme. *préliminaire*
$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leq \alpha \, ||x||_E$

preuves :

3.8.2 Applications polynomiales

Définitions. *On appelle fonction monôme sur K^p toute fonction m de K^p dans K s'écrivant :*
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, $m(x_1, \dots, x_n) = \alpha \prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k}$ *avec $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\alpha \in K$*

Une application de K^n dans K est dite polynomiale si c'est une combinaison linéaire finie de fonctions monômes sur K^p

Théorème . *Toute application polynomiale de K^n dans K est continue.*

preuve :

Exemple. *L'application $\det : M_n(K) \longrightarrow K$ est continue.*

3.8.3 Applications multilinéaires

Définition. *Soit E_1, E_2, ... , E_p et F des K espaces vectoriels.*
Une application f de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F est dite p-linéaire
si et seulement si $\forall i \in [\![1;p]\!]$ $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ l'application partielle
$$f_i \; : \; \begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{array}$$ *est linéaire*

Théorème . *Si F est un K espace vectoriel normé et si E_1, E_2, ... , E_p sont des K espaces vectoriels de* **dimension finie**. *Alors toute application p-linéaire de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.*

preuve :

Exemple. *L'application* $pm \; : \; \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}$ *est continue.*

Sommaire

preuve du 1.1.4 : une boule ouverte est ouverte

• Soit $a \in E$, $r > 0$. On pose $A = \mathring{B}(a,r)$ et on veut montrer que A est un ouvert.

• Soit $x \in A$.
Posons $\rho = r - ||x-a||$. Comme $x \in A$ alors $||x-a|| < r$ et donc $\rho > 0$

• Soit $y \in \mathring{B}(x,\rho)$
$y - a = y - x + x - a$ et par inégalité triangulaire $||y-a|| \leq ||y-x|| + ||x-a||$
Mais $y \in \mathring{B}(x,\rho) \Rightarrow ||x-y|| < \rho$ donc $||y-a|| < \rho + ||x-a|| = r$ et donc $y \in A$
Ceci étant vraie $\forall y \in \mathring{B}(x,\rho)$ on a $\mathring{B}(x,\rho) \subset A$

• On a alors : $\forall x \in A\ ,\ \exists \rho > 0\ ,\ \mathring{B}(x,\rho) \subset A$, on a donc bien A ouvert.

Bilan : $\boxed{\text{Une boule ouverte est ouverte.}}$

---

preuve du 2.6.2. : caractérisation séquentielle de l'adhérence

• Si a est adhérent à A
alors $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathring{B}(a, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$
On peut don choisir $a_n \in \mathring{B}(a, \frac{1}{n+1}) \cap A$
On a $||a_n - a|| \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$.
On a donc construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Autrement dit : $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}\ ,\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

• Réciproquement
On suppose qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}\ ,\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} ||a_n - a|| = 0$
Soit $\epsilon > 0$. Alors par définition de la limite : $\exists N \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon$ et donc $\mathring{B}(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$
Comme le résultat est vrai pour tout $\epsilon > 0$ on a a adhérent à A.

Bilan : $\boxed{a \text{ est adhérent à } A \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}\ ,\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a}$

---

preuve du 2.6.4. : lien adhérence-fermé

• Supposons que soit un fermé de $\mathbb{R}$
On sait que $A \subset \overline{A}$ est toujours vrai. Montrons l'autre inclusion.
Soit $a \in \overline{A}$
Raisonons par l'absurde. Si $a \notin A$
Alors, comme A est fermé, son complémentaire auquel appartient a est ouvert, donc $\exists \epsilon > 0\ ,\ \mathring{B}(a,\epsilon) \cap A = \emptyset$ ce qui contredit $a \in \overline{A}$
Donc $a \in A$ et donc $\overline{A} \subset A$
Comme on a les deux inclusions on en déduit : $A = \overline{A}$

• Réciproquement
Supposons que $A = \overline{A}$ et montrons que A est fermé.
Soit $a \in E \backslash A$ (le complémentaire de A dans E)
Comme $A = \overline{A}$ on a $a \in E \backslash \overline{A}$, donc a n'est pas adhérent à $A = \overline{A}$ et donc $\exists r > 0\ ,\ \mathring{B}(a,r) \cap A = \emptyset$
On en déduit $\exists r > 0\ ,\ \mathring{B}(a,r) \subset E \backslash A$
On a bien démontrer que $E \backslash A$ était un ouvert et donc que A est fermé.

• Bilan : $\boxed{A \text{ est un fermé de } E \text{ si et seulement si } A = \overline{A}}$