

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°4

EXERCICE 1

a) Pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
 & \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))-1}{x}\right) \\
 &= \ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right) \\
 &= \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}\frac{x^3}{8} + o(x^3) \\
 &= \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^3 + o(x^3) \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^3)}$

b) Pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{x-\sin(x)}{e^x-1} \\
 &= \frac{x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))}{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} \\
 &= \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
 &= \frac{\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x}{2}+o(x)} \\
 &= \left(\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right) \\
 &= \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\frac{x-\sin(x)}{e^x-1} = \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)}$

c) Pour x au voisinage de 0 :

$$\ln(ch(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On a donc : $\boxed{\ln(ch(x)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

d) $x\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\exp(x\ln(x)) = 1 + x\ln(x) + o(x\ln(x)) \Rightarrow \exp(x\ln(x)) - 1 = x\ln(x) + o(x\ln(x)) \sim x\ln(x)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 = \frac{1}{2}x + o(x) \sim \frac{1}{2}x$$

Donc $\frac{e^{x\ln(x)}-1}{\sqrt{1+x}-1} \sim \frac{x\ln(x)}{\frac{x}{2}} \sim 2\ln(x)$

On a donc : $\boxed{\frac{e^{x\ln(x)}-1}{\sqrt{1+x}-1} \underset{x=0}{\sim} 2\ln(x)}$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } u_n &= \sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2+1} \\
 &= \sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \\
 &= n^{2/3} \left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
 &= n^{2/3} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\sim n^{2/3} \frac{1}{3} \frac{1}{n} \\
 &\sim \frac{1}{3n^{1/3}}
 \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n^{1/3}}}$

$$\text{f) On pose : } \begin{array}{ccc} a & : &]1, +\infty[\longrightarrow +\infty \\ t & \mapsto & \frac{1}{\ln(t)} \end{array}$$

Alors a est une fonction continue sur son domaine. On peut donc considérer A une primitive de A .

Comme : $\forall x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$, alors :
 $f(x) = A(x^2) - A(x)$

Comme A est une primitive d'une fonction continue, alors, A est C^1 et $A' = a$
 On a donc f C^1 comme composée de fonctions C^1 .

On a alors : $\forall x > 1$, $f'(x) = 2xa(x^2) - a(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$

Bilan : $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall x > 1, f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}}$

EXERCICE 2

a) $\frac{u_n}{n^{3/2}} = \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n = o(\frac{1}{n^{1/2}})$

Comme $\frac{1}{n^{1/2}} > 0$ et que $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ est convergente, alors, par négligeabilité : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

b) Pour $n \geq \exp(1)$ on a : $0 \leq \frac{1}{n+2} \leq u_n$

Comme $\sum \frac{1}{n+2}$ est une série de Riemann divergente, alors, par comparaison : $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$

c) On a : $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc, par comparaison, $\sum |u_n|$ est convergente.

Par absolue convergence : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

d) Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ alors (a_n) est la suite des sommes partielles d'une série de Riemann divergente.

On en déduit (a_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

On a ainsi, comme $|u_n| = \frac{1}{a_n}$: $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0 \end{cases}$

Donc, par le théorème spécial : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Exercice 3

1°) Posons $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x(x+1)}$

1°) a) f est continue sur $]0; \pi]$, I_1 pose problème en 0.

$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{x(x+1)} \underset{x=0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

Mais par Riemann, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, \pi]$ donc par équivalent $x \mapsto f(x)$ est intégrable sur $]0, \pi]$.

Par absolue convergence on a donc : $\boxed{I_1 \text{ est convergente.}}$

1°) b) f est continue sur $[\pi; +\infty[$, I_2 pose problème en $+\infty$.

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{x(1+x)} \leq \frac{1}{x^2} > 0$$

Mais $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc, par la règle de comparaison I_2 est absolument convergente et donc, par absolue convergence, I_2 est convergente.

$$1^\circ) \text{ c) } \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ I_1 \text{ est convergente} \\ I_2 \text{ est convergente} \end{cases} \quad \text{donc } I \text{ est convergente.}$$

2°) $x \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0; +\infty[$, A pose donc problème en 0 et $+\infty$

$$\forall x \in]0; 1] , \quad 0 \leq \left| \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors, par la règle de comparaison $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ est absolument convergente et donc convergente.

Au voisinage de $+\infty$: $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} > 0$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, alors par Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc par équivalent $x \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc, par absolue convergence $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

Bilan : $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ convergente donnent $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

3°) • $x \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0; +\infty[$, B pose donc problème en 0 et $+\infty$

• Au voisinage de 0 : $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

$x \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

• Soit $A > \pi$ alors par intégration par parties : $\int_{\pi}^A \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{-\cos(t)}{\sqrt{t}} \right]_{\pi}^A + \int_{\pi}^A \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}} dt = \frac{-\cos(A)}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \int_{\pi}^A \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}} dt$

Mais $\left| \frac{\cos(t)}{t\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ et comme $\frac{3}{2} > 1$, alors par Riemann, $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

Alors, par équivalent $t \mapsto \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

Par absolue convergence on a ainsi : $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}} dt$ convergente.

Puisque $\left| \frac{-\cos(A)}{\sqrt{A}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\cos(A)}{\sqrt{A}} = 0$

On déduit donc de l'intégration par partie précédente que : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}} dt \right] \in \mathbb{R}$.

On a donc que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

• Finalement, $\begin{cases} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \text{ convergente} \\ \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \text{ convergente} \end{cases}$ permet de conclure que B est convergente.

Problème 1

1°) Si on note : $\Delta : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{matrix}$, alors on sait que Δ est linéaire de E dans E , donc que Δ est un endomorphisme. De plus $\Delta^n = O$ et $\Delta^{n-1}(X^n) = n! \neq 0_E$ donc :

La dérivation est endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}_n[X]$, d'indice de nilpotence n .

2°) $u \in \mathcal{N}$ donc u est nilpotent et on note p son indice de nilpotence.

$v \in \mathcal{N}$ donc v est nilpotent et on note q son indice de nilpotence.

Comme u et v commutent : $(u \circ v)^p = u^p \circ v^p = O \circ v^p = O$ donc $u \circ v \in \mathcal{N}$

Par la formule du binôme, comme u et v commutent : $(u + v)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} u^k \circ v^{p+q-k}$

Si $k \geq p$ alors $u^k = O$ et donc $u^k \circ v^{p+q-k} = O$

Si $k \leq p$ alors $p - k \geq 0$ et donc $p + q - k \geq q$ ce qui donne $v^{p+q-k} = O$ et donc $u^k \circ v^{p+q-k} = O$

Finalement $(u + v)^{p+q} = O$ et donc $u + v \in \mathcal{N}$

Bilan : $u, v \in \mathcal{N}$ tels que $u \circ v = v \circ u \Rightarrow u \circ v \in \mathcal{N}$ et $u + v \in \mathcal{N}$

3°) Soit $u, v \in L(E)$ tels que $u \circ v \in \mathcal{N}$

Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $(u \circ v)^p = O$. On compose par v à gauche et u à droite et on a : $v \circ (u \circ v)^p \circ u = O$

Mais $v \circ (u \circ v)^p \circ u = v \circ (u \circ (v \circ u)^{p-1} \circ v) \circ u = (v \circ u) \circ (v \circ u)^{p-1} \circ (v \circ u) = (v \circ u)^{p+1}$

Ce qui donne $(v \circ u)^{p+1} = O$ et donc $v \circ u \in \mathcal{N}$

Bilan : $u, v \in L(E)$ On a : $u \circ v \in \mathcal{N} \Rightarrow v \circ u \in \mathcal{N}$

4°) a) Si $\forall x \in E$, $f^{p-1}(x) = 0_E$ alors $f^{p-1} = O$ donc f est nilpotente d'indice inférieur à $p - 1$. Absurde puisque f est nilpotent d'indice p .

Donc : $\exists x \in E$, $f^{p-1}(x) \neq 0_E$

4°) b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$

On peut alors poser $i = \text{Min}(\{k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, a_k \neq 0\})$ et on a $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

En composant par f^{p-1-i} on a : $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^{k+p-i}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Et comme pour $k > i$ on a $f^{k+p-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow a_i = 0$ puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui contredit la définition de i . Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) = (0, 0, \dots, 0)$ et on a montré que :

la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre dans $\mathbb{R}^n$

4°) c) Une famille libre de E possède au plus n éléments, donc avec la famille du b) on a : $p \leq n$

5°) Soit $u \in \mathcal{N}$. On note p l'indice de nilpotence de u .

On utilise l'analogie avec le DL : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^p + o(x^p)$

Posons $w = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$, alors $w \circ (Id_E - u) = \sum_{k=0}^{p-1} u^k - \sum_{k=0}^{p-1} u^{k+1} = Id_E - u^p$ par télescopage. Mais comme $u^p = O$ alors $w \circ (Id_E - u) = Id_E$ et donc $Id_E - u$ est inversible et $(Id_E - u)^{-1} = w$.

Bilan : Si $u \in \mathcal{N}$ alors $Id_E - u$ est inversible et $(Id_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$

6°) Soit $u \in \mathcal{N}$ d'indice de nilpotence n .

On utilise le 4°) b) avec $p = n$ et les mêmes notations. La famille $B = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$ étant une famille libre de E , c'est une base de E puisqu'elle contient exactement $n = \dim(E)$ vecteurs.

La matrice de u dans cette base est exactement celle voulue!!!

On a donc : Si $u \in \mathcal{N}$ d'indice de nilpotence n alors il existe une base de E

relativement à laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7°) a) Avec les hypothèses de cette question, on considère une combinaison linéaire de la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ qui est nulle.

Soit donc $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b_0, b_1, \dots, b_{q-1}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que : $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j u^j(y) = 0_E$

On pose $r = p - q$ et on a $r \geq 0$ car par hypothèse $p \geq q$.

On compose alors, la relation ci-dessus par u^q et on obtient : $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^{i+q}(x) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j u^{j+q}(y) = 0_E$

Comme $j + q \geq q$ on a $u^{j+q}(y) = 0_E$, il reste donc : $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^{i+q}(x) = 0_E$

Pour $i + q \geq p \Leftrightarrow i \geq p - q \Leftrightarrow i \geq r$ on a : $u^{i+q}(x) = 0_E$ il reste donc : $\sum_{i=0}^{r-1} a_i u^{i+q}(x) = 0_E$

$i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket \Rightarrow i + q \in \llbracket q, q + r - 1 \rrbracket \Rightarrow i + q \in \llbracket q, p - 1 \rrbracket$

on peut donc appliquer la question 4°b) et obtenir $a_i = 0$ pour $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$

Reporter dans notre relation de départ il reste donc : $\sum_{i=r}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j u^j(y) = 0_E$

Changement d'indice $j = i - r$ dans la première somme. Comme $p - 1 - r = p - 1 - (p - q) = q - 1$ on a

alors : $\sum_{j=0}^{q-1} a_{j+r} u^{j+r}(x) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j u^j(y) = 0_E \Rightarrow \sum_{j=0}^{q-1} [a_{j+r} u^{j+r}(x) + b_j u^j(y)] = 0_E$

On compose par u^{q-1} et on obtient : $\sum_{j=0}^{q-1} [a_{j+r} u^{j+r+q-1}(x) + b_j u^{q-1+j}(y)] = 0_E$

Et compte tenu de $u^p(x) = 0_E$ et $u^q(y) = 0_E$ il reste (puisque $q - 1 + r = q - 1 + p - q = p - 1$) : $a_{p-1} u^{p-1}(x) + b_{q-1} u^{q-1}(y) = 0_E$

Mais comme $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors : $a_{p-1} = 0$ et $b_{q-1} = 0$

Il reste alors : $\sum_{j=0}^{q-2} [a_{j+r} u^{j+r}(x) + b_j u^j(y)] = 0_E$

On compose alors par u^{q-2} et on obtient $a_{p-2} = 0$ et $b_{q-2} = 0$

On réitère ce procédé jusqu'à épuisement des termes et on obtient que tous les coefficients a_i et b_j sont nuls

ce qui, finalement, permet de montrer que : la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

7°) b) Soit $u \in \mathcal{N}$ d'indice de nilpotence p tels que $p \geq 2$ et $p \geq n - 1$

- Soit $x \in \text{Im}(u^{p-1})$

Alors x peut s'écrire $x = u^{p-1}(z)$ avec $z \in E$.

Donc, comme $p \geq 2 \Leftrightarrow p - 2 \geq 0$ on peut écrire : $x = u(u^{p-2}(z))$ et donc $x \in \text{Im}(u)$.

De plus $u(x) = u(u^{p-1}(z)) = u^p(z) = 0_E$ car u est nilpotente d'indice p . On en déduit $x \in \ker(u)$
 $x \in \ker(u)$ et $x \in \text{Im}(u)$ donc $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$

On a montré : $\forall x \in E, x \in \text{Im}(u^{p-1}) \Rightarrow x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$

Donc : $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \ker(u) \cap \text{Im}(u)$

- Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$

Si $x = 0_E$ alors directement $x \in \text{Im}(u^{p-1})$. On considère maintenant le cas $x \neq 0_E$

Alors $x \in \text{Im}(u) \Rightarrow x = u(y)$ avec $y \in E$

De plus $x \in \ker(u) \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u^2(y) = 0_E$

Comme $u^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ alors $\exists z \in \text{Im}(u^{p-1})$ tel que $z \neq 0_E$

Comme $z \in \text{Im}(u^{p-1})$ on peut écrire $z = u^{p-1}(t)$ avec $t \in E$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u^{p-1}(t), u(y))$ est libre.

Alors, comme de plus : $u^p(t) = 0_E, u^2(y) = 0_E, u^{p-1}(t) \neq 0_E$ et $u(y) = x \neq 0_E$, on peut appliquer le a) et on a la famille $(x, u(x), t, u(t), \dots, u^{p-1}(t))$ qui est libre.

Mais cette famille contient $p + 2$ vecteurs et $p + 2 \geq n + 1$ puisque $p \geq n - 1$.

Une famille de strictement plus de n vecteurs ne peut pas être libre en dimension n , on a donc une absurdité.

On en déduit que $(u^{p-1}(t), u(y))$ est liée et donc que $x = u(y) \in \text{Im}(u^{p-1})$

Pour tout $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$ on a $x \in \text{Im}(u^{p-1})$, on a donc l'inclusion: $\ker(u) \cap \text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^{p-1})$

- On a donc, par double inclusion : $\boxed{\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Im}(u^{p-1})}$

- Raisonnons encore par l'absurde et supposons que $\dim(\text{Im}(u^{p-1})) \geq 2$

On a alors une famille $(X, Y) \in \text{Im}(u^{p-1})^2$ qui est libre.

On écrit $X = u^{p-1}(x)$ et $Y = u^{p-1}(y)$. On peut alors appliquer le a) et on a une famille libre de $p + p$ vecteurs.

Mais $p \geq 2$ et $p \geq n - 1$ donc $p + p \geq (n - 1) + 2 = n + 1 > n$ et on a une absurdité comme précédemment.

On a donc : $\dim(\text{Im}(u^{p-1})) < 2$ et comme $u^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ alors $\boxed{\dim(\text{Im}(u^{p-1})) = 1}$

Problème 2

1°) a) Après calculs on a : $(AB)^2 = AB$ et donc $C = AB$ est bien une matrice de projection.

1°) b) $rg(AB) = rg\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ Comme la troisième colonne est la somme des deux premières alors

$$rg(AB) = rg\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Les deux colonnes étant libre on a : $rg(AB) = 2$

1°) c) Par le théorème du rang $dim(ker(AB)) = 3 - rg(AB) = 3 - 2 = 1$ et comme $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ alors

$$ker(AB) = Vect(e_1) \text{ avec } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de AB étant libre et $rg(AB) = 2$ elles forment une base de $Im(AB)$

On a donc $Im(AB) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2°) a) Soit $x \in Im(u \circ v)$ alors $\exists z \in E$, $x = (u \circ v)(z) = u(v(z))$ Mais $x = u(v(z)) \Rightarrow x \in Im(u)$

On a bien $x \in Im(u \circ v) \Rightarrow x \in Im(u)$ et donc $Im(u \circ v) \subset Im(u)$

On en déduit $dim(Im(u \circ v)) \leq dim(Im(u))$ et donc $rg(u \circ v) \leq rg(u)$

2°) b) $rg(u \circ v) = dim(u(v(E))) = dim(u(Im(v)))$

En appliquant le théorème du rang à la restriction de u à $Im(v)$ on a $dim(u(Im(v))) \leq dim(Im(v))$

Finalement $rg(u \circ v) \leq rg(v)$

2°) c) En combinant les résultats du a) et du b) on a : $rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$

3°) $(AB)^2 = AB \Rightarrow ABAB = AB$ et comme AB est de rang 2 alors : $rg(ABAB) = 2$
 En utilisant le 2°) $2 = rg(ABAB) = rg(A(BAB)) \leq rg(BAB) = rg((BA)B) \leq rg(BA)$
 Donc $2 \leq rg(BA)$. Comme, de plus $BA \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(BA) \leq 2$

On en déduit donc que $rg(BA) = 2$

Remarque : dans ce 3°) on a utilisé le 2°) même si on avait pas d'endomorphisme, en effet le résultat du 2°) est généralisable avec $v \in L(E, F)$ et $u \in L(F, G)$ ou E, F et G sont trois espace vectoriel de dimension finie.

4°) $BA \in M_2(\mathbb{R})$ et $rg(BA) = 2$ donc BA est inversible

Comme $ABAB = AB$ en multipliant à gauche par B on obtient : $BABAB = BAB$

Comme BA est inversible on peut multiplier à gauche par $(BA)^{-1}$ et on obtient : $BAB = B$

On multiplie alors à droite par A pour avoir $BABA = BA$, que l'on multiplie à droite par $(BA)^{-1}$ pour obtenir le résultat voulu, à savoir : $BA = I_2$

Problème 3 : Beceas 2024

$$1) H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$\text{mais } k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \text{ donc } H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall n \geq 1, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}}$$

$$2)a) \text{ Posons : } \forall x \in]0, 1], \varphi(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Alors φ est continue sur $]0, 1]$ et pour x au voisinage de 0, on a :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + o(1)$$

Donc en posant : $\varphi(0) = \frac{-1}{2}$ on peut prolonger φ en une fonction continue sur $[0, 1]$

Comme une fonction continue sur un segment est bornée, alors : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], |\varphi(x)| \leq C$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x = \frac{1}{n} \in]0, 1]$ donc : $|\varphi(\frac{1}{n})| \leq C$ et donc $\left| \frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq C$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2}}$$

2)b) • Avec l'inégalité du a), comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, on en déduit, par règle de comparaison que : $\sum \left(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right)$ est absolument convergente donc convergente.

$$\text{On a donc : } \boxed{\sum \left(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right) \text{ est convergente.}}$$

$$\bullet \text{ On peut alors poser : } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right) = -\gamma \text{ et on a alors : } \sum_{k=1}^n \left(\ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k} \right) = -\gamma + o(1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Mais } \sum_{k=1}^n \left(\ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) - H_n \\ &= \ln(n+1) - H_n \\ &= \ln(n) - H_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n) - H_n + o(1) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \ln(n) - H_n + o(1) = -\gamma + o(1) \text{ et donc : } \boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$$

$$3) t \mapsto \ln(t)e^{-t} \text{ est continue sur }]0, +\infty[\text{ donc } \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt \text{ pose problème en 0 et en } +\infty$$

$$\bullet \text{ En 0 on a : } \ln(t)e^{-t} \sim \ln(t) \text{ et d'après le cours, } t \mapsto \ln(t) \text{ est intégrable sur }]0, 1]$$

Donc par règle de l'équivalent $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$

$$\bullet \text{ En } +\infty$$

$$t^2(\ln(t)e^{-t}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ par comparaison, ln, puissance, exp}$$

On en déduit $\ln(t)e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$.

Mais, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors, par négligeabilité, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

- En regroupant les deux résultats ci-dessus : $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

et donc $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$ est convergente.

4)a) On pose : $\forall u > -1$, $a(u) = u - \ln(1+u)$

Alors a est C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et $a'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$

u	-1	0	$+\infty$
$a'(u)$	$-$	0	$+$
$a(u)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On a donc le tableau de variation :

On en déduit : $\forall u > -1$, $a(u) \geq 0$ et donc $\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$

4)b) Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0, n[$, alors $\frac{-t}{n} > -1$ et on peut lui applique le a).

On en déduit : $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq \frac{-t}{n}$

Comme $n \geq 2$ alors on peut multiplier cette inégalité par $n-1 > 0$ ce qui donne :

$$(n-1)\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq (n-1)\frac{-t}{n} = -t + \frac{t}{n}$$

Mais comme $t \in [0, n]$ alors $\frac{t}{n} \leq 1$ et donc $(n-1)\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -t + 1$

Comme l'exp est croissante on peut composer cette inégalité par $\exp$: $\exp((n-1)\ln(1 - \frac{t}{n})) \leq \exp(1-t)$

Et donc : $(1 - \frac{t}{n})^{n-1} \leq ee^{-t}$

On a : $\forall n \geq 2$, $(1 - \frac{t}{n})^{n-1} \leq ee^{-t}$

$$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$5) \text{ On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > n \\ \ln(t)(1 - \frac{t}{n})^{n-1} & \text{si } t \in [0, n] \end{cases}$$

Si on fixe $t \in \mathbb{R}^+$ alors, à partir d'un certain rang : $f_n(t) = \ln(t)(1 - \frac{t}{n})^{n-1} = \exp((n-1)\ln(1 - \frac{t}{n}))$ mais $(n-1)\ln(1 - \frac{t}{n}) \sim n\frac{-t}{n} = -t$, donc par composition de limite : $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(t)e^{-t}$

La suite de fonction (f_n) converge donc simplement vers $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$

De plus, comme $t \mapsto e\ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (comme en question 3) alors, on a l'hypothèse de domination.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)dt$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t)(1 - \frac{t}{n})^{n-1}dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$

6) On fait le changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{t}{n}$ dans la première intégrale (qui est bien convergente) et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\
&= \int_0^1 \ln(nu) (1-u)^{n-1} (n du) \\
&= n \int_0^1 [\ln(n) + \ln(u)] (1-u)^{n-1} du \\
&= n \int_0^1 \ln(n) du + n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du \text{ on effectue maintenant une IPP dans l'intégrale} \\
&= \ln(n) + \left[\ln(u) [(1-u)^n - 1] \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{u} du
\end{aligned}$$

On a pris comme primitive de $n(1-u)^{n-1}$ la fonction $(1-u)^n - 1$, ce qui nous permet d'annuler le crochet, qui est donc convergent, et d'affirmer la convergence de l'intégrale.

En résumé et en reprenant l'étape intermédiaire, on a :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln(n) + n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du = \ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{u} du$$

7) On écrit : $\frac{(1-u)^{n-1}}{u} = \frac{(1-u)^{n-1}}{1-(1-u)} = - \sum_{k=0}^{n-1} (1-u)^k$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $1-u$)

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{u} du = \int_0^1 \left(- \sum_{k=0}^{n-1} (1-u)^k \right) du = - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -H_n$$

$$\text{En reprenant le 6) : } \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln(n) - H_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, par définition de γ et convergence de l'intégrale, on a :

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$$

8) • Pour $s > 1$, $\zeta(s)$ est une série de Riemann et on sait qu'elle converge.

$$\zeta \text{ est bien définie sur }]1, +\infty[$$

• Soit $k \geq 1$. Comme $s > 1$ alors $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

$$\text{En intégrant sur } [k, k+1] : \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{k^s}$$

En sommant de $k = 1$ à $N \geq 1$ on a, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}$$

Les trois membres ont une limite, donc en faisant $N \rightarrow +\infty$:

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s)$$

$$\text{En réordonnant : } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt + 1$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt = \left[\frac{-1}{(s-1)t^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{\zeta(s)}{\frac{1}{s-1}} \leq 1 + s - 1 = s$$

Donc, par encadrement, lorsque $s \rightarrow 1^+$ on a : $\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(s)}{\frac{1}{s-1}} = 1$ et donc $\boxed{\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}}$

$$9)a) \ n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \frac{n}{n^s} \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^s\right) = \frac{1}{n^{s-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s\right) = \frac{1}{n^{s-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{s}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^{s-1}} \left(\frac{s}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \sim \frac{1}{n^{s-1}} \frac{s}{n+1} \sim \frac{s}{n^s}$$

Mais comme $s > 1$ alors $\sum \frac{s}{n^s}$ est une série de Riemann convergente, à termes positifs, donc, par équivalent

$$\boxed{\sum n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \text{ est convergente}}$$

$$9)b) \ \sum_{n=1}^N n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(n\frac{1}{n^s} - n\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(n\frac{1}{n^s} - (n+1)\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(n\frac{1}{n^s} - (n+1)\frac{1}{(n+1)^s}\right) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}}\right) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= 1 - \frac{1}{(N+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= -\frac{1}{(N+1)^{s-1}} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= -\frac{1}{(N+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^s} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \zeta(s)$$

$$\text{On a montrer : } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = \zeta(s)}$$

$$9)c) \ \forall t \in [1, +\infty[, \lfloor t \rfloor \leq t \Rightarrow 0 \leq \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} \leq \frac{t}{t^{s+1}} = \frac{1}{t^s}$$

Comme $s > 1$, on a $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}$ est intégrable sur

$[1, +\infty[$ et $s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt$ est convergente.

Alors, par la relation de Chasles :

$$s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{sk}{t^{s+1}} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[-\frac{1}{t^s} \right]_k^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{(k+1)^s} - \frac{1}{k^s} \right) \text{ on utilise 9)b)}$$

$$= \zeta(s)$$

$$\text{On a donc bien : } \boxed{\zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt}$$

10) Soit $N \geq 2$, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
& \int_1^N \frac{|t|-t}{t^2} dt \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{|t|-t}{t^2} dt \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{n-t}{t^2} dt \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{-n}{t} - \ln(t) \right]_n^{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - \ln(n+1) + \ln(n) \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \right) = H_N - 1 - \ln(N)
\end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{\int_1^N \frac{|t|-t}{t^2} dt = H_N - 1 - \ln(N)}$

En faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ on a : $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^2} dt = \gamma - 1}$

11) ●● Comme les deux intégrales convergent on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& s \int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^{s+1}} dt \\
&= s \int_1^{+\infty} \frac{|t|}{t^{s+1}} dt - s \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^{s+1}} dt \text{ on utilise le 9)c)} \\
&= \zeta(s) - \int_1^{+\infty} \frac{s}{t^s} dt = \zeta(s) - \left[\frac{-s}{(s-1)t^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \zeta(s) - \frac{s}{s-1}
\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^{s+1}} dt}$

●●● Posons :
$$\begin{array}{ccc}
F & : & [1/2, +\infty[\times [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\
& & (s, t) \longmapsto \frac{t-|t|}{t^{s+1}}
\end{array}$$

● Soit $\forall s \in [\frac{1}{2}, +\infty[$

Alors : $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leq F(s, t) \frac{t-|t|}{t^{s+1}} \leq \frac{1}{t^{s+1}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison : $t \mapsto F(s, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

On a donc :
$$\begin{cases}
\forall t \in [1, +\infty[, s \mapsto F(s, t) \text{ est continue sur } [\frac{1}{2}, +\infty[\\
\forall s \in [\frac{1}{2}, +\infty[, t \mapsto F(s, t) \text{ est continue par morceaux sur } [1, +\infty[\\
\forall (s, t) \in [\frac{1}{2}, +\infty[\times [1, +\infty[, |F(s, t)| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \text{ avec } t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[
\end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres et on en déduit :

$$f : s \mapsto \int_1^{+\infty} F(s, t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t-|t|}{t^{s+1}} dt \text{ continue sur } [\frac{1}{2}, +\infty[$$

● $1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ donc f est continue en 1 et on déduit : $f(1) = \lim_{s \rightarrow 1} f(s) \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 1} \int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^{s+1}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^2} dt$

● On a vu en début de question que : $\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{+\infty} \frac{|t|-t}{t^{s+1}} dt$ et donc que : $\Leftrightarrow \zeta(s) = \frac{s}{s-1} + sf(s)$

Avec la continuité de f , on a, pour $s \rightarrow 1^+$:

$$\zeta(s) = \frac{s-1+1}{s-1} + s(f(1) + o(1)) = 1 + \frac{1}{s-1} + (1 + o(1))(f(1) + o(1)) = 1 + \frac{1}{s-1} + f(1) + o(1)$$

Mais d'après la question 10) : $f(1) = \gamma - 1$ donc $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \gamma - 1 + o(1) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$

On a donc : $\boxed{\text{lorssque } s \rightarrow 1^+ , \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)}$