Feuille d'exercices n°25 : chap. 10

Exercice 234. *On pose, pour tout entier naturel n non nul :* $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & Min(n, \frac{x^2}{n}) + x^2 \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *que l'on précisera.*
b) Soit $A > 0$. *Montrer que :* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[-A, A]$
c) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 235. *On pose, pour tout entier naturel n* $\begin{array}{rccc} f_n & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & arctan(\frac{t}{n+1}) \end{array}$

a) Etudier la convergence simple sur $[0, +\infty[$
b) Soit $a > 0$. *Etudier la convergence uniforme sur* $[0, a]$
c) La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$ *?*

Exercice 236. *On pose, pour tout entier naturel n :* $\begin{array}{rccc} f_n & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{1+x^n} \end{array}$

a) Etudier la convergence simple sur $[0, +\infty[$
b) Soit $a \in]0, 1[$. *Etudier la convergence uniforme sur* $[0, a]$
c) Soit $a \in]1, +\infty[$. *Etudier la convergence uniforme sur* $[a, +\infty[$
d) Etudier la convergence uniforme sur $[0, 1[$
e) Etudier la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$

Exercice 237. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = nsin(x)cos^n(x)$
a) Etudier la convergence simple sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ *de la suite de fonctions* (f_n).
b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.
c) Que peut-on déduire du b) sur la convergence uniforme de (f_n) *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *?*
d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclu dans $]0, \frac{\pi}{2}]$

Exercice 238. *On pose, pour tout entier naturel n :* $\begin{array}{rccc} f_n & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & arctan(\frac{n+t}{1+nt}) \end{array}$

a) Etudier la convergence simple sur $[0, +\infty[$
b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$
c) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 239. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions décroissantes convergeant simplement vers la fonction nulle sur* $[0, 1]$.
Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 240. *(*$\star$*)*
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions polynomiales de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite converge uniformément vers f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Montrer que f *est une fonction polynômiale.*