Feuille d'exercices n°26 : chap. 10

Exercice 241. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par :*

$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n \ si\ x \in [0,n[\\ 0\ si\ x \geq n \end{cases}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

b) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$

On pose $\forall x \in [0,+\infty[\ \Delta_n(x) = f(x) - f_n(x)$

c) Trouver une majoration simple de Δ_n sur $[n,+\infty[$

d) Calculer $\Delta_n'(x)$ sur $[0,n[$

e) Montrer que sur $[0,n[$, $\Delta_n'(x)$ est du même signe que $\varphi_n(x)$ avec $\varphi_n(x) = (n-1)ln(1-\frac{x}{n})+x$

f) Etudier la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ et montrer qu'elle est bornée.

g) Etudier φ_n sur $[0,n[$

h) Montrer que : $||\Delta_n||_\infty = \sup\limits_{[0,+\infty[} |\Delta_n(t)| \leq Max(\frac{M}{n}, e^{-n})$ avec M une constante.

i) Montrons que la convergence de f_n vers f est uniforme sur $[0,+\infty[$

Exercice 242. $(\star)$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$\forall x \in [0,1]\ , u_0(x) = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}(x) = 1 + \int\limits_0^x u_n(t-t^2)dt$

a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]\ ,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

b) Etablir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction u vérifiant : $u'(x) = u(x-x^2)$

Exercice 243. *On pose, pour tout entier naturel non nul n :* $\begin{array}{cccc} f_n & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{sin(nt)}{nt+t^2} \end{array}$

a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n)
b) Soit $a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$
c) Y-a-t-il convergence uniforme sur $]0,+\infty[$
d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{sin(nt)}{nt+t^2}dt$