Feuille d'exercices n°27 : chap. 11

Exercice 244. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = t^n$ *et on considère la série de fonctions* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Donner le domaine de définition de S.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[-a, a]$ *avec* $a \in]0, 1[$

c) La convergence est-elle uniforme sur le domaine de S *?*

Exercice 245. *a) Déterminer le domaine de définition de* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{n^2+x^2}$

b) Montrer que la convergence est normal sur $\mathbb{R}$.

c) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 246. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t) = \frac{e^{-nt} sin(nt)}{ln(1+n)}$ *et on considère la série de fonctions* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Etudier la convergence simple de $S(x)$.

b) Soit $a > 0$, *montrer qu'il y a convergence uniforme sur* $[a, +\infty[$

Exercice 247. *Soit la suite de fonctions* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par :*
$\forall n \geq 1$,$\forall t \in [0, 1]$, $u_n(t) = n^2(1-t)t^n - (n-1)^2 t^{n-1}(1-t)$

a) Montrer que : $\forall n \geq 1$,$\forall t \in [0, 1]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t) = n^2(1-t)t^n$

b) Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge simplement sur* $[0, 1]$ *vers la fonction nulle.*

c) Comparer les valeurs : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 u_k(t)dt$ *et* $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t))dt$

Exercice 248. *Montrer que la série de fonctions :* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{nxe^{-nx}}{n^2+1}$ *converge normalement sur son domaine.*

Exercice 249. *Étude de la fonction* $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2t^2}$ *: ensemble de définition, variations, limites, continuité, classe* C^1,*intégrabilité sur* $]0, +\infty[$.

Exercice 250. *On pose* $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(nx)}{n^3}$

a) Montrer que S *est définie sur* $\mathbb{R}$.

b) Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que S *est continue sur* $\mathbb{R}$.

d) Montrer que : $\int\limits_0^{\pi} S(t)dt = 2 \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4}$

e) Montrer que S *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et donner l'expression de* $S'(x)$ *sous forme de somme.*

f) Montrer que : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(nt)}{n^2} dt = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$