Feuille d'exercices n°28 : chap. 11

Exercice 251. *Pour $x > 0$ on pose :* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

a) Montrer que S est bien définie et est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Montrer que : $\forall x > 0\ ,\ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0^+
e) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$

Exercice 252. *Pour $x > 0$ on pose :* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$

a) Justifier que S est continue et définie sur $]0, +\infty[$
b) Trouver une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 253. *a) Soit $0 < a < b$. Montrer que :* $\int\limits_a^b (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nt})dt = \frac{sh(\frac{b-a}{2})}{2sh(\frac{a}{2})sh(\frac{b}{2})}$

b) Etudier l'existence de $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nt})dt$ et de $\int\limits_1^{+\infty} (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nt})dt$.

Exercice 254. *On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :* $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{n^2+2n+x^2} \end{array}$

1°) Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2°) En admettant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x^2}$

Exercice 255. *($\star$)*
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ de longueur non nul. Soit $f_0 \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.
On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in [a, b]\ ,\ f_{n+1}(x) = \int\limits_a^x f_n(t)dt$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. On note $F = \sum\limits_{n \geq 0} f_n$

b) Justifier l'existence et le caractère C^1 sur $[a, b]$ de $G : x \mapsto \int\limits_a^x F(t)dt$

c) A l'aide d'une équation différentielle vérifiée par G, déterminer F en fonction de f_0

Exercice 256. ($\star$)
On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$ pour $x \in I = [0, +\infty[$

a) Montrer S est continue sur I.
b) Montrer que S est dérivable sur l'intérieur de I.
c) Etudier la dérivabilité en $inf(I)$
d) Etudier $\lim\limits_{x \to sup(I)} S(x)$