

Devoir surveillé de Mathématiques n°3 : TYPE 1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner une fleur en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Question de cours

1°) Soit E un espace vectoriel.

- a) Donner la définition d'une norme sur E .
- b) Donner la définition de deux normes équivalentes sur E .

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}^n$. On pose $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $N(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Montrer que N est une norme sur E .

3°) On pose :

$$\begin{array}{ccc} f & : &]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\ln(t)}{1+t^3} \end{array}$$

Montrer que : $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Problème 1

1°) Montrer que $\forall R \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} R(t) dt$ est convergente.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ qui est convergente d'après le a).

2°) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (A_k) et en déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de A_k .

3°) Soit $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Exprimer la valeur de $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ en fonction des coefficients p_k .

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose $\forall (P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ et on remarque que l'intégrale est convergente grâce au 1°).

4°) Montrer que $\langle, \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

5°) Pour tout réel a on considère le polynôme R_a défini par $R_a(X) = aX$

a) Déterminer un réel a tel que la norme $\|1 + R_a\|$ soit minimale. Quelle est la valeur de ce minimum ?

b) Montrer que, pour la valeur de a minimisant $\|1 + R_a\|$, les polynômes R_a et $R_a + 1$ sont orthogonaux.

Dans la suite du problème, on se propose de déterminer pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la valeur :

$$m(n) = \inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^2 e^{-x} dx$$

On note $V_n = Vect(X, X^2, \dots, X^n)$ le sous espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $X, X^2, \dots, X^n$

On considère la projection orthogonale Q_n du polynôme constant -1 sur V_n

On note $Q_n(X) = q_1 X + q_2 X^2 + \dots + q_n X^n$

et on pose $P_n(X) = 1 + q_1(X+1) + q_2(X+1)(X+2) + \dots + q_n(X+1)(X+2) \dots (X+n)$

6°) a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} (1 + Q_n(x)) x^k e^{-x} dx = 0$

6°) b) En calculant la valeur de la question précédente d'une autre manière, montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_n(k) = 0$

7°) Montrer que : $P_n(X) = q_n(X-1)(X-2) \dots (X-n)$

8°) Calculer $P_n(-1)$ et en déduire la valeur de q_n .

9°) Exprimer $m(n)$ à l'aide de la norme et de Q_n .

10°) a) Montrer que : $\langle 1 + Q_n, Q_n \rangle = 0$.

10°) b) Exprimer $m(n)$ à l'aide des q_k , puis de P et finalement en fonction de n .

Problème 2

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss : $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

A) Préliminaire

1°) Montrer que G est bien une intégrale convergente.

B) Intégrale de Wallis

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

2°) Calculer les valeurs W_0 et W_1 .

3°) Déterminer, pour $n \geq 2$, une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .

4°) Montrer que (W_n) est décroissante et que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$

5°) Montrer que la suite définie par $\theta_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est une suite constante.

6°) Montrer que : $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

C) Calcul de G

7°) a) Montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

7°) b) i) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2)$$

7°) b) ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; \sqrt{n}], \exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

7°) c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2) dt$$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

On remarquera que l'intervalle d'intégration pour la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$.

7°) c) i) Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

7°) c) ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , u_n \leq I_n$$

7°) c) iii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , u_n \leq I_n \leq v_n$$

8°) a) A l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n}\sin(x)$, exprimer u_n en fonction de W_{2n+1}

8°) b) A l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n}\tan(x)$, montrer que :

$$\forall n \geq 1 , v_n = \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Indication : on rappelle la relation $\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)}$

8°) c) En déduire la valeur de G