Devoir surveillé de Mathématiques n°3 : TYPE 2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner une fleur en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Problème 1

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'une équation différentielle.

Notations

- On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

  On admet que $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

  On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I Transformée de Laplace, généralités

I.A –

Q1) Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F, notée $\mathcal{L}(f)$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q2) Démontrer que l'application : $\mathcal{L} : \left| \begin{array}{ll} E & \to \mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right) \\ f & \mapsto F \end{array} \right.$ est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f

I.B – Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.B.1) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}\left(f_n\right)$

Q4) Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Q5) Soit $a \in]0, +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$.
Montrer que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}\left(g_{a,b}\right)$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}\left(h_{a,b}\right)$.

I.B.3)

Q6) a) Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, appartient à E.

Q6) b) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E.

I.C – Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

Q7) Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}\left(f'\right)(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f'' \in E$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

Q8) Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}\left(f''\right)(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

On admet pour la suite le résultat suivant :

Si φ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{t\in[0,1]}|\varphi(t)-P_{\mathrm{n}}(t)|\right)=0$

II Injectivité de la transformation de Laplace et applications

II.A – On se propose, dans cette sous-partie, de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E, c'est-à-dire que

$$\forall\,(y_1,y_2)\in E^2,\quad \mathcal{L}\,(y_1)=\mathcal{L}\,(y_2)\Longrightarrow y_1=y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f)=0$.

Pour tout nombre réel $t\in\mathbb{R}^+$, on pose $g(t)=\int\limits_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$

Q9) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

Q10) Montrer que g est une fonction bornée.

Q11) Justifier, pour tout $p\in\mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p\in\mathbb{R}^{+*},\quad \mathcal{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(u)=\begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0<u\leqslant 1,\\ \int\limits_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \text{si } u=0.\end{cases}$

Q12) Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

Q13) Démontrer que

$$\forall p\in\mathbb{R}^{+*},\quad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u$$

Q14) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int\limits_0^1\varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u=0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int\limits_0^1 P(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0.$$

Q15) En utilisant le résultat admis à la fin de la partie I, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int\limits_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int\limits_0^1\varphi^2(t)\mathrm{d}t\right)=0$$

Q16) En déduire que $f=0$.

Q17) Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

II.B − Le but de cette sous-partie est de résoudre à l'aide de la transformation de Laplace le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ , & y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ & y(0) = 0 \\ & y'(0) = 1. \end{cases}$$

On suppose que y est une solution du problème (PC) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie I.C.

Q18) Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2)\,\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}$.

Q19) Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1 + p + p^2}{p^2\,(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p + 1)^2 + 1}.$$

Q20) Résoudre (PC)

Problème 2

Notations et Rappels

Lorsque n et p sont deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Par exemple :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;\ \forall i \in \{1, \ldots ,n\},\ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On rappelle que : $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \quad (MN)^\top = N^\top M^\top$.

On rappelle la définition du noyau et la définition de l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } AX = 0\} \quad ; \quad \mathrm{Im}(A) = \{AX \text{ avec } X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par :

$$(X \mid Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = X^\top Y$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\|$ la norme de X associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|X\| = \sqrt{(X \mid X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top X}$$

L'orthogonal d'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire est défini par :

$$F^\perp = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que : } \forall Y \in F,\ (X \mid Y) = 0\}$$

Partie A – L'égalité $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^{\top})$

Q1. Soient $C_1,\dots,C_p$ les vecteurs colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, déterminer $E_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $C_j = A\,E_j$.
Montrer que la famille $(C_1,\dots,C_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$.

I – Un premier exemple

Dans cette partie, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

Q2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Q3. Montrer que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^{\top})$.

II – Une démonstration

Q4. Justifier que pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on a $X^{\top}Y = Y^{\top}X$.

Q5. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\top}Y = 0$ alors X est nul.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Q6. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $X^{\top}AZ = Z^{\top}A^{\top}X$.

Q7. En déduire que : $A^{\top}X = 0 \iff (\forall Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), X^{\top}AZ = 0)$.

Q8. En déduire que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^{\top})$.

III – Une application

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

Q9. Justifier que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(A^{\top})$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q10. Justifier que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^{\top})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q11. En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $(X',X'') \in \mathrm{Ker}(A^{\top}) \times \mathrm{Im}(A^{\top})$ tel que $X = X' + A\,X''$.
Montrer *que le couple (X',X'') ainsi associé à X est unique. On note alors u l'application $u : X \mapsto X''$.*

Q12. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note B la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q13. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et (X',X'') défini de manière unique en **Q11**.
A l'aide de la définition d'une projection orthogonale et de la question **Q8** montrer que $A\,X''$ est le projeté orthogonal de X sur $\mathrm{Im}(A)$.
En déduire que AB est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

Q14. Montrer que BA est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^{\top})$.

IV – Un deuxième exemple

Jusqu'à la fin de cette partie, on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q15. Déterminer le rang de A et le rang de $A^\top$.

Q16. Déterminer une base de chacun des espaces $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ et $\mathrm{Ker}(A^\top)$.
On exprimera chaque base à l'aide des vecteurs de $\mathcal{B}_c$.

Q17. Vérifier que l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ construit en **Q11**, est l'application :

$$u : X = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto X'' = \sum_{k=1}^{n-1} k x_{k+1} e_k = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ \vdots \\ (n-1)x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q18. Construire la matrice B de u dans $\mathcal{B}_c$.

Q19. Vérifier le résultat de la question **Q14**.

Partie B – Une expression de la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base quelconque

L'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique rappelé en préambule.

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de dimension k et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_k)$ une base de F.

On note p_F la projection orthogonale sur F et A la matrice de $\mathcal{B}_F$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

La matrice A est donc dans $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ et ses colonnes sont les vecteurs $f_1, \cdots, f_k$ exprimés dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice $A^\top A$ est inversible et que $A(A^\top A)^{-1}A^\top$ est la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Q20. Justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Q21. Montrer que : $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A) \Rightarrow \|AX\| = 0 \Rightarrow X = 0$.

Q22. Montrer que $A^\top A$ est inversible.

Q23. Montrer que $F = \mathrm{Im}(A)$.

Q24. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il existe $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que : $p_F(X) = AY$ et $X - AY \in \mathrm{Ker}(A^\top)$.

Q25. En déduire que la matrice $A(A^\top A)^{-1}A^\top$ est la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.