Chapitre 9 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 9.1

Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 < (x + y)^2 + xy\}$ est un ouvert.

Correction

On pose f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x + y)^2 + xy - 1$.
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $A = f^{-1}(]0; +\infty[)$. Comme l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert alors $\boxed{A \text{ est un ouvert.}}$

Enoncé, Exercice 9.2

On note A l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont la trace vaut 1.
Montrer que A est un convexe fermé.

Correction

$A = tr^{-1}(\{1\})$ et tr est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Comme l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé alors A est un fermé.

Soit $M, N \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $tr(\lambda M + (1 - \lambda)N) = \lambda tr(M) + (1 - \lambda)tr(N) = \lambda + 1 - \lambda = 1$ puisque $tr(M) = tr(N) = 1$.
Donc $\lambda M + (1 - \lambda)N \in A$.

On a : $\forall M, N \in A \ , \ \forall \lambda \in [0, 1] \ , \ \lambda M + (1 - \lambda)N \in A$ donc A est convexe.

$\boxed{A \text{ est un convexe fermé.}}$

Enoncé, Exercice 9.3 ($\star$)

Soit $E = C^0([0,1])$. On pose $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f(1)$ et $\Phi(f) = \int\limits_{[0;1]} f$

On considère les deux normes (admis) sur E définies par $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{[0;1]} |f(t)|$ et $N(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$

φ et Φ sont-elles continues de (E, N_∞) dans $\mathbb{R}$?
φ et Φ sont-elles continues de (E, N) dans $\mathbb{R}$?

Correction

• : On remarque que : $\forall f \in E$: $|\varphi(f)| = |f(1)| \leq N_\infty(f)$

Alors $\forall f, g \in E$ par linéarité : $|\varphi(f) - \varphi(g))| \leq N_\infty(f-g)$ donc φ est 1-lipschitzienne sur E et donc φ est continue de (E, N_∞) dans $\mathbb{R}$.

• : ona : $\forall f \in E$, $|\Phi(f)| \leq N_\infty(f)$
Φ est linéaire et $\forall f, g \in E$, $|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq N_\infty(f-g)$ donc Φ est 1-lipschitzienne et donc Φ est continue de (E, N_∞) dans $\mathbb{R}$.

• : Considérons pour $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n$. Alors $N(f_n) = \int\limits_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$
Donc, pour la norme N on a $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0_E$ mais $\varphi(f_n) = 1 \neq \varphi(0_E)$.
Donc φ n'est pas continue en 0_E et donc pas continue sur (E, N)

• : On a, par l'inégalité de la moyenne : $\forall f \in E$, $|\Phi(f)| \leq N(f)$ et comme Φ est linéaire, $\forall f, g \in E$, $|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq N(f-g)$, donc Φ 1-lipschitzienne et ona : Φ continue sur (E, N)

Enoncé, Exercice 9.4

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0;\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = sin(u_n)$

Correction

Posons $\begin{array}{cccc} f & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t - sin(t) \end{array}$

Alors f est C^∞ et $f'(t) = 1 - cos(t) \geq 0$ donc f est croissante.
Comme $f(0) = 0$ alors $\forall t \geq 0$ on a $f(t) \geq 0 \Leftrightarrow sin(t) \leq t$

Par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0,\pi]$ (puisque $[0,1] \subset [0,\pi]$)
Alors $f(u_n) \geq 0 \Rightarrow sin(u_n) \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$
La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, donc convergente.
Notons ℓ sa limite, alors, en passant à la limite, par continuité $u_{n+1} = sin(u_n) \Rightarrow \ell = sin(\ell) \Leftrightarrow f(\ell) = \ell$
L'étude de f permet de montrer que $\lambda = 0$

Bilan : $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$