Chapitre 10 : Suites de fonctions

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et les applications considérées sont de I dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

1.1 Convergence simple

1.1.1 Définition

Définition. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K*
.

*Alors on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f si et seulement si $\forall t \in I\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$*

Remarque. *Autrement dit : $\forall t \in I\ , \forall \epsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0 \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$*

1.1.2 Exemples

Exemple 1 : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$ converge simplement vers $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases} \end{array}$

Exemple 2 : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} (1 - \frac{t^2}{n})^n \text{ si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 \text{ si } t > \sqrt{n} \end{cases} \end{array}$

converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $\begin{array}{cccc} f & : & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array}$

Exemple 3 : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{array}$ converge simplement vers $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1+4x^2} \end{array}$

1.2 Convergence uniforme

1.2.1 Définition

On dit que la suite de fonctions $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to K$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I\ ,\ |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$

Remarque. *Attention, l'ordre des quantificateurs n'est pas le même que pour la convergence simple.*

1.2.2 Interprétation topologique

Rappel : On note $B(I, K)$ l'ensemble des applications bornées de I dans K et on pose, pour tout $f \in B(I, K)$: $||f||_{I,\infty} = \sup\limits_{t\in I} |f(t)|$ ce qui définit une norme sur $B(I, K)$.

On a alors :

Théorème . *La suite de fonctions $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to K$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f - f_n||_{I,\infty} = 0$*

Remarques. $||f - f_n||_{I,\infty}$ *n'est pas forcément définie pour toute les valeurs de n car $f - f_n$ n'est pas forcément bornée sur I.*
Par contre cette valeur est définie pour n "assez grand".
Détails voir preuve ci-dessous.

preuve :

1.2.3 Une petite propriété

Lemme. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction bornées de I dans K convergeant uniformément vers une fonction f de I dans K. Alors : f est bornée.*

preuve :

1.3 CU $\Rightarrow$ CS

Théorème . *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K*
.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I

Remarques. *Autrement dit, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. (CU $\Rightarrow$ CS)*
La réciproque est évidement fausse (voir exemple)
En pratique, on montre d'abord la CS, car pour montrer la CU, il est bon de connaître f !!!
On peut noter ceci : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CU}{\longrightarrow}} f \Rightarrow f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CS}{\longrightarrow}} f$

preuve :

1.4 Exemples

Exemple 1 : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

Converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$, converge uniformément sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$ et ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ (faire $f_n(1-\frac{1}{n})$)

Exemple 2 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{array}$

Converge uniformément sur $\mathbb{R}$

Exemple 3 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : &]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{t}+\frac{1}{n} \end{array}$

Convergence uniforme sur $]0,1]$ mais les normes infinies de f et des f_n n'existe pas ...

Exemple 4 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} n^2x \text{ si } x\in[0,\frac{1}{n}[\\ \frac{1}{x} \text{ si } x\in[\frac{1}{n},+\infty[\end{cases} \end{array}$

convergence simple, convergence uniforme sur $[a;+\infty[$ mais pas CU sur $]0,+\infty[$ (prendre $f_n(\frac{1}{n^3})$ ...)

Exemple 5 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & Min(n,\frac{x^2}{n}) \end{array}$

C.U. vers fonction nulle sur tout $[-A,A]$, mais pas CU sur $\mathbb{R}$.

1.5 Point méthode

Pour montrer la convergence uniforme on majore $|f(x)-f_n(x)|$ en éliminant les x mais en gardant du n pour que çà tende vers 0.
Une étude de $x\mapsto f(x)-f_n(x)$ sur I pour calculer $||f-f_n||_{I,\infty}$ peut être utile...

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue en } a \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue en } a$$

preuve :

2.2 Continuité global

2.2.1 Premier théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue sur } I \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue sur } I$$

preuve :

2.2.2 Corollaire important

Corollaire. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue sur } I \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur tout segment inclus dans } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue sur } I$$

preuve :

2.2.3 Exemple

Exemple 1 : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

Exemple 2 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{1}{n} \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases} \end{array}$

C.U. sur $\mathbb{R}$ mais discontinuité en 0 car les f_n ne sont pas continue en 0

Exemple 3 : $\begin{array}{ccccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & exp(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(\sqrt{2}kx)}{k^2}) \end{array}$

Alors f_n CS sur $\mathbb{R}$, CU sur $\mathbb{R}$ (utiliser le reste et exp lipschitizienne sur $[a,b]$ ...)
et on a f continue sur $\mathbb{R}$ ...

3 Intégration et dérivation

3.1 Intégration sur un segment

3.1.1 Théorème

Théorème . *Soit* $[a;b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$, (f_n) *une suite d'application de* $[a;b]$ *dans* K *et* f *une application de* $[a;b]$ *dans* K. *Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } [a;b] \\ (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a;b] \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque. *Autrement dit, la CU donne :* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$

preuve :

3.1.2 Exemples

Exemple. *1*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & n^2(1-t)t^n \end{array}$$

C.S. vers fct nulle mais pas d'interversion ... donc pas de C.U. ...

Exemple. *2*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1-\frac{t}{n})^n \end{array}$$

3.2 Dérivabilité

Théorème . *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nulle.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, soit* f *une fonction de* I *dans* K *Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ (f'_n) \text{ converge uniformément vers une fonction } g \text{ sur } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ f' = g \end{cases}$$

Remarques. *En pratique, la convergence uniforme sur tout segment de* I *est suffisante.*
Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d}{dx} f_n(t) = \frac{d}{dx} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$
Comme on le verra dans la preuve on a aussi (f_n) *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I *(pas dans le théorème du programme, mais utile dans la preuve du théorème suivant)*

preuve :

Exemple. *1*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{sin(nt)}{\sqrt{n}} \end{array}$$

C.U. sur $\mathbb{R}$, *mais les* f'_n *ne converge même pas !!!*

Exemple. *2*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(kx)}{k^5} \end{array}$$

3.3 Extension aux suites de fonctions de classe C^k

Théorème . *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nulle et* $k \in \mathbb{N}^*$
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k-1]\!] \ , \ (f_n^{(i)}) \text{ converge simplement sur } I \\ (f_n^{(k)}) \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la limite simple de } (f_n)\text{, notée } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k]\!] \ , \ \forall x \in I \ , \ f^{(i)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(i)}(x) \end{cases}$$

preuve :

Exemple. *suite de l'exemple précédent*

Sommaire

preuve du 1.2.2. : interprétation topologique de la convergence uniforme

• $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to K$
donc $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I \ , \ |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$

Si on prend $\epsilon = 1$ ci-dessus alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I \ , \ |f(t) - f_n(t)| \leq 1$

On a donc, pour $n \geq n_0$, $f_n - f$ est bornée et on peut poser : $||f - f_n||_\infty^I$

• On peut donc interpréter la CU de la manière suivante :
$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \geq n_0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq N \Rightarrow \forall t \in I \ , \ ||f - f_n||_\infty^I \leq \epsilon$

Autrement dit, par retour à la définition de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f - f_n||_\infty^I = 0$

---

preuve du 1.3. : $CU \Rightarrow CS$

Si on reprend les notations de la preuve de 1.2.2. et que l'on fixe t.
On a pour t fixé et $n \geq n_0$, $|f_n(t) - f(t)| \leq ||f - f_n||_\infty^I \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$
Comme ceci est vrai pour tout $t \in I$ alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

---

preuve du 2.1. : Transfert de continuité en un point

Soit $\epsilon > 0$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f - f_n||_\infty^I = 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N} \ , \ ||f - f_N||_\infty^I \leq \frac{\epsilon}{3}$

Par hypothèse f_N est continue en a donc $\exists \eta > 0 \ , \ \forall x \in I \ , \ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f_N(t) - f_N(a)| \leq \frac{\epsilon}{3}$
On a alors pour $t \in I$ tel que $|t - a| \leq \eta$:
$|f(t) - f(a)|$
$= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)|$ inégalité triangulaire
$\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$
$\leq ||f - f_N||_\infty^I + |f_N(t) - f(a)| + ||f - f_N||_\infty^I$
$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

On a donc : $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ , \ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq \epsilon$
Ce qui est la définition de f est continue en a.

---

preuve du 3.1. : CU et intégration sur un segment

• Déjà les f_n sont continue et il y a convergence uniforme, donc f est continue et de ce fait est intégrable sur $[a, b]$

• $\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt$ par inégalité triangulaire
$\leq \int_a^b |f_n - f|_\infty \, dt$ par définition de la norme infinie
$\leq (b - a)\, |f_n - f|_\infty \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

---

preuve du 3.2. : CS et CU et dérivabilité

• Les f_n sont C^1. On fixe $a \in I$ et on a : $\forall x \in I\ ,\ f_n(x) = f_n(a) + \int\limits_a^x f_n'(t)dt$

• $[a, x] \subset I$ donc (f_n') converge uniformément vers g

On peut donc appliquer 3.1. pour obtenir : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^x f_n'(t)dt = \int\limits_a^x g(t)dt$

• En utilisant le résultat précédent et en utilisant aussi la convergence simple de (f_n), on obtient, en passant à la limite dans $f_n(x) = f_n(a) + \int\limits_a^x f_n'(t)dt$: $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)dt$

• Comme les f_n' sont continues et que la convergence est uniforme alors g est continue.

On a donc $x \mapsto \int\limits_a^x g(t)dt$ qui est la primive d'une fonction continue et qui est donc C^1.

On en déduit f est C^1

En dérivant $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)dt$, on obtient alors : $f'(x) = g(x)$ et donc $g = f'$